Der Gumbel Max-Anziehungsbereich in der Extremwerttheorie

Bachelorarbeit

Vorgelegt von

Torben Staud

aus Neuss, Deutschland

Angefertigt am
Mathematischen Institut
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

16. März 2020

Betreuer: Prof. Dr. Axel Bücher

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der Extremwerttheorie ist die Verteilungskonvergenz der Maxima von Zufallsvariablen gegen Extremwertverteilungen ein zentraler Gegenstand der Untersuchung. Das Fisher-Tippet-Theorem identifiziert unter anderem die Gumbel-Verteilung als Extremwertverteilung.
Eine initiale Fragestellung ist, wann solch ein Maximum in Verteilung gegen die Gumbel-Verteilung konvergiert. Diese Frage untersuchen und beantworten wir in dieser Bachelorarbeit.
Zu diesem Zwecke formalisieren wir im ersten Kapitel die Ausgangslage und wiederholen Definitionen, die für die folgenden Kapitel wichtig sind.
Im zweiten Kapitel erarbeiten wir Resultate, die die lokal gleichmäßige Konvergenz isotoner Abbildungen betreffen und führen die generalisierte Inverse isotoner Funktionen ein. Für diese formulieren wir ihrerseits ein Konvergenztheorem.
Diese Theorie dient als Fundament des dritten Kapitels, in welchem wir erweiterte Formen der regulären Variation, namentlich die Gamma- und Pi-Variation, explorieren. Zwischen diesen und dem Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung stellen wir im letzten Kapitel einen engen Zusammenhang her, um eine äquivalente Bedingung zu generieren, wann eine Verteilungsfunktion in ebenjenem Max-Anziehungsbereich liegt. Schlussendlich zeigen wir zahlreiche Anwendungen der Theorie auf, indem wir konkrete Verteilungen untersuchen.
Die vorliegende Arbeit ist dem mathematischen Feld der Extremwerttheorie zuzuordnen und setzt somit vertiefte Kenntnisse der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie voraus, welche [Bücher(a)] entnommen wurden. Weiterhin geht dieser Bachelorarbeit eine Vorlesung über die Extremwerttheorie [Bücher(b)] voraus, wobei Wert daraufgelegt wird, die Nutzung tiefliegender Resultate weitesgehend zu vermeiden. Zur Einordnung der Arbeit ist jene Vorlesung oder eine ähnliche Auseinandersetzung mit der Extremwerttheorie, wie sie etwa [Kabluchko] oder [Löwe] ermöglichen, jedoch unabdingbar.
Primärquelle dieser Bachelorarbeit ist [Resnick]. Dennoch setzen wir an einigen Stellen andere Schwerpunkte, definieren Objekte abweichend, führen Beweise alternativ oder entwickeln eigene Resultate. Geschehen jene Dinge in relevanter Weise, so notieren wir dies. Zusätzlich geben wir Beispiele und erarbeiten Übungsaufgaben, welche der an diesen Stellen ausgewiesenen Literatur entstammen.

1 Extremwerttheoretische Grundlagen

In der gesamten Arbeit seien Zufallsvariablen auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert. Mit $M_n := \max\{X_1, \dots, X_n\}$ bezeichnen wir das Maximum n unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_n$ mit zugehöriger Verteilungsfunktion F, wobei n eine natürliche Zahl sei. Zusätzlich nennen wir $x_l := \inf\{x \in \mathbb{R} \colon F(x) \geq 0\}$ den **linken** und $x_r := \inf\{x \in \mathbb{R} \colon F(x) \geq 1\}$ den **rechten Endpunkt** (der Verteilung).
Motiviert durch den zentralen Grenzwertsatz definieren wir für eine weitere nicht degenerierte Verteilsfunktion G:
F **liegt im Max-Anziehungsbereich von** G oder F **wird von** G **angezogen**, falls Folgen von Konstanten $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ derart existieren, dass

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} G. \tag{1.1}$$

In diesem Fall nennen wir G eine **Extremwertverteilung**. Mittels des Portmanteau Theorems in Verbindung mit der Unabhängigkeit der X_i erhalten wir die zu (1.1) äquivalente Formulierung

$$F^n(a_n x + b_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} G(x), \text{ für alle Stetigkeitspunkte } x \text{ von } G. \tag{1.2}$$

Dieser Beziehung entnehmen wir $F(a_n x + b_n) \xrightarrow{n \to \infty} 1$ und damit $a_n x + b_n \xrightarrow{n \to \infty} x_r$ für alle Kontinuitätsstellen x. Demnach hat lediglich das Verhalten von F nahe dem rechten Endpunkt x_r Einfluss darauf, ob F von G angezogen wird, sodass Abänderungen der Verteilungsfunktion F auf Bereichen mit einem rechten Eckpunkt kleiner x_r die Beziehung (1.2) nicht beeinflussen.
Zwei Zufallsvariablen X, Y sind vom **selben Typ**, falls es $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ solcherart gibt, dass $X \overset{d}{=} aY + b$ gilt.
Die Extremwertverteilungen werden durch das Fisher-Tippet Theorem
[Fisher und Tippet] charakterisiert und sind demnach vom Fréchet-, Weibull- oder Gumbel-Typ. Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht der Gumbel-Typ, wobei eine Zufallsvariable X **Gumbel-verteilt** ist, falls die zugehörige Verteilungsfunktion die Form

$$F(x) = \Lambda(x) := \exp(-e^{-x}),\ x \in \mathbb{R},$$

besitzt. Wir schreiben eine Gumbel-verteilte Zufallsvariable als Λ.
Unter Beachtung, dass $\Lambda(x)$ beliebig oft differenzierbar und folglich stetig ist, können wir (1.2) spezifizieren:
Eine Verteilungsfunktion F liegt im Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung, falls Konstanten $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$ solchergestalt existieren, dass

$$F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{n \to \infty} \Lambda(x), \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Unser Ziel ist nun eine von Folgen unabhängige Äquivalenz von (1.3) zu finden, welche somit ermöglichen würde, konstruktiv zu überprüfen, ob eine Zufallsvariable X in dem Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung liegt.

2 Die Theorie isotoner Funktionen

Isotone Funktionen bilden die passende Funktionenklasse, um später die Pi- und Gamma-Variationen angemessen definieren zu können. Mithin wird hier eine echte Oberklasse der Verteilungsfunktionen behandelt, was eine Unanwendbarkeit wahrscheinlichkeitstheoretischer Resultate nach sich zieht.

2.1 Die Theorie gleichmäßiger Konvergenz isotoner Funktionen

Diese Theorie wird später bei der Analyse der Pi- und Gamma-Variationen ein wichtiges Hilfsmittel darstellen. So erhalten wir mit jener Theorie im dritten Kapitel Analogien zu dem Satz über die gleichmäßige Konvergenz regulär variierender Funktionen für die genannten Variationsformen. Weiterhin generiert sie Resultate über die Konvergenz von Verteilungsfunktionen.

Definition 2.1.1 (gleichmäßige und lokal gleichmäßige Konvergenz)**.**
Es seien $f, f_1, f_2, \ldots$ reellwertige Funktionen, die von einer Menge $D \subset \mathbb{R}$ abbilden.

(a) f_n **konvergiert** (auf D) **gleichmäßig** gegen f, wenn folgende Beziehung erfüllt ist

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

(b) f_n **konvergiert lokal gleichmäßig** gegen f, falls für alle a, b mit $[a, b] \subset D$

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

gilt.[1]

Eng verwandt und hilfreich ist das Konzept der auf Hahn zurückgehenden *stetigen Konvergenz*. Vergleiche für folgende Ausführungen auch mit
[Kuratowski, Abschnitte 20.6, 20.8] und mit [Hahn, Abschnitt 4.2].

Definition 2.1.2 (Stetige Konvergenz)**.**
Seien $f, f_1, f_2, \ldots$ reellwertige Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}$, wobei D abgeschlossen ist.
f_n **konvergiert stetig gegen** f, falls für alle gegen ein $x \in D$ konvergierende Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Beziehung

$$f_n(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} f(x)$$

gilt.

Lemma 2.1.3.
Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und seien $f, f_1, f_2, \ldots$ reelle Funktionen auf K, wobei f als stetig angenommen werde. Dann konvergiert f_n stetig gegen f genau dann, wenn f_n auf K gleichmäßig gegen f konvergiert.

[1] Diese Konvergenzart wird auch **kompakte Konvergenz** genannt. In **lokalkompakten** Räumen, also wenn jede Punktumgebung in dem Raum eine kompakte Umgebung enthält, stimmen beide Konvergenzbegriffe überein. Der Raum $\mathbb{R}$ ist evident lokal-kompakt, sodass wir in dieser Arbeit auf eine Unterscheidung verzichten; man vergleiche mit [Remmert und Schumacher, Abschnitt 3.1.3].

Beweis. Für die Hinrichtung konvergiere f_n stetig gegen f und wir nehmen an, diese Konvergenz sei nicht gleichmäßig. Es existierten also eine Teilfolge n_k und ein $\varepsilon > 0$ dergestalt, dass für alle k die Ungleichung $\sup_{x\in K} |f_{n_k}(x) - f(x)| > 0$ gälte. Dies ließe uns eine derartige Folge x_{n_k} finden, dass

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| > \varepsilon/2, \text{ für alle } k \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

stimmen würde. Die Menge K ist kompakt und damit insbesondere folgenkompakt, weswegen wir eine Teilfolge $(x_{n_{k_j}})_j$ von $(x_{n_k})_k$ mit $x_{n_{k_j}} \xrightarrow{j\to\infty} x$ fänden. Es würde

$$|f_{n_{k_j}}(x_{n_{k_j}}) - f(x_{n_{k_j}})| \leq |f_{n_{k_j}}(x_{n_{k_j}}) - f(x)| + |f(x) - f(x_{n_{k_j}})| \xrightarrow{j\to\infty} 0$$

folgen, da f_n stetig gegen f konvergiert und f stetig ist. Dies stünde jedoch im Widerspruch zu (2.1).

Für die Rückrichtung konvergiere f_n gleichmäßig gegen f und es seien $x_n, x \in K$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, für $n \in \mathbb{N}$, gegeben. Wir erhalten

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leq \sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| + |f(x_n) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

da f_n gleichmäßig gegen f konvergiert und f stetig ist. □

Das vorangegangene Lemma ermöglicht es unter gewissen Umständen von punktweiser auf lokal gleichmäßige Konvergenz zu schließen.

Satz 2.1.4.
Es seien die reellen Funktionen $f_1, f_2, \ldots$ mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ isoton und punktweise konvergent gegen eine stetige reelle Funktion f mit selbem Definitionsbereich. Dann ist diese Konvergenz bereits lokal gleichmäßig.

Beweis. Lemma 2.1.3 rechtfertigt stetige Konvergenz zu zeigen, da abgeschlossene und beschränkte Intervalle insbesondere kompakt sind. Seien dafür $a < b \in D$ und $(x_n)_n \subset [a, b]$ eine gegen $x \in D$ konvergente Folge. Wir zeigen $f_n(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$. Es gilt

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|. \tag{2.2}$$

Aufgrund der punktweisen Konvergenz bleibt lediglich zu zeigen, dass der erste Summand verschwindet. Dafür sei $\varepsilon > 0$. Mithilfe der Stetigkeit wählen wir ein $\delta > 0$ mit $\max\{|f(x \pm \delta) - f(x)|\} < \varepsilon$. Da x_n gegen x konvergiert, erhalten wir für große n $|x_n - x| \leq \delta$. Die Isotonie der f_n und die punktweise Konvergenz implizieren

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f_n(x)| &\leq \limsup_{n\to\infty} \max\{|f_n(x \pm \delta) - f_n(x)|\} \\ &= \max\{|f(x \pm \delta) - f(x)|\} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Das vorausgehende Resultat und (2.2) zeigen, dass f_n stetig gegen f konvergiert. □

Satz 2.1.4 lässt sich auf (globale) gleichmäßige Konvergenz anheben, falls wir die Existenz der einseitigen Rand-Limiten fordern. Als Konsequenz dessen formulieren wir eine Aussage über die gleichmäßige Konvergenz von Verteilungsfunktionen.

Es bezeichne a den linken beziehungsweise b den rechten Eckpunkt des Definitionsbereiches D, wobei diese auch $-\infty$ beziehungsweise $+\infty$ annehmen dürfen.
Wir nutzen die übliche Notation

$$f(x-) := \lim_{y \uparrow x} f(x) \text{ und } f(x+) := \lim_{y \downarrow x} f(x).$$

Satz 2.1.5.
Es mögen die endlichen Limiten $f(a+)$, $f(b-)$ existieren und mit denen der f_n übereinstimmen. So gilt unter denselben Voraussetzungen von Satz 2.1.4, dass f_n gleichmäßig gegen f konvergiert.

Beweis. Der Lesbarkeit halber setzen wir $y_l := f(a+)$ und $y_r := f(b-)$.
Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen die Konvergenz ist nicht gleichmäßig. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für welche der Zusammenhang

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_{n_k}(x) - f(x)| > \varepsilon \tag{2.3}$$

besteht. Ohne Einschränkung sei die Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bereits ganz $\mathbb{N}$, da wir sonst jedes n durch n_k ersetzen könnten. Mit (2.3) erhalten wir die Existenz einer derartigen Folge $(x_n)_n$, dass

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| > \varepsilon \tag{2.4}$$

für alle n gilt.

Satz 2.1.4 garantiert nun, dass die Folge in keinem Kompaktum enthalten ist. Nach dem Satz von Heine-Borel ist sie somit nach oben oder nach unten unbeschränkt. Wir behandeln nur den ersten Fall, da der Zweite mit den nahezu selben Argumenten bewiesen werden kann. Dazu nehmen wir an, dass die Folge bestimmt divergiert, denn sonst gingen wir zu der Teilfolge über, die jenes erfüllt.
Die Funktion f ist als Grenzfunktion einer isotonen Funktionenfolge seinerseits isoton. Dies, die Isotonie und die Voraussetzung $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} y_r$ garantieren die Existenz eines $a \in D$ mit $y_r - \varepsilon/2 \le f(a) \le y_r$. Für große n schließen wir aufgrund der punktweisen Konvergenz und der Kondition $f_n(x) \xrightarrow{x\to\infty} y_r$, dass die Beziehung $y_r - \varepsilon \le f_n(a) \le y_r$ wahr ist. Aufgrund der bestimmten Divergenz der Folge $(x_n)_n$ gilt $x_n > a$. Wir konkludieren demnach für große n

$$y_r - \varepsilon \le f_n(x_n) \le y_r \text{ und } y_r - \varepsilon/2 \le f(x_n) \le y_r,$$

sodass (2.4) widersprechend

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \le |y_r - \varepsilon - y_r| = \varepsilon$$

gilt. □

Instantan folgt ein wichtiges Resultat über die Konvergenz von Verteilungsfunktionen.

Korollar 2.1.6.
Es seien F_n, F Verteilungsfunktionen, wobei F_n punktweise gegen die stetige Verteilungsfunktion F konvergiere. Dann ist diese Konvergenz gleichmäßig (auf $\mathbb{R}$).

Beweis. Wir wenden Satz 2.1.5 auf F_n und F an, was möglich ist, da Verteilungsfunktionen isoton sind und endliche Limiten, nämlich 0 und 1, besitzen. □

Beispiel 2.1.7.
Konvergieren Zufallsvariablen X_n gegen eine normal- oder Gumbel-verteilte Zufalls-

variable X, so ist die Konvergenz der dazugehörigen Verteilungsfunktionen gleichmäßig.

Beweis. Die Verteilungsfunktionen der Normal- und Gumbelverteilung sind beliebig oft differenzierbar und infolgedessen stetig, womit die Behauptung aus Korollar 2.1.6 folgt. □

2.2 Die generalisierte Inverse isotoner Funktionen

Wir werden im dritten Kapitel einen inversen Zusammenhang zwischen der Pi- und Gamma-Variation feststellen. Da jedoch isotone Funktionen im Allgemeinen nicht invertierbar sein müssen, benötigen wir eine Verallgemeinerung des Begriffes der Invertierbarkeit isotoner Funktionen.

Definition 2.2.1 (Generalisierte Inverse)**.**
Sei $H\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ eine nicht-konstante, isotone Funktion, wobei $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Wir definieren die **(linksstetige) generalisierte Inverse von** H als

$$H^{-1} := H^{\leftarrow}\colon\ ]H(a+), H(b-)[\to \mathbb{R},\ y \mapsto \inf\{x \in W\colon H(x) \geq y\},$$

dabei setzen wir $W :=]a,b[$ und $D :=]H(a+), H(b-)[$.

Bemerkung 2.2.2.
Dieses Objekt ist wohldefiniert. Insbesondere können keine unendlichen Werte auftreten, da für jedes $y \in]H(a+), H(b-)[$ sowohl x_1 mit $H(x_1) < y$ als auch x_2 mit $H(x_2) > y$ existieren.

In der Literatur werden verschiedene Definitionen der generalisierten Inversen genutzt. Definition 2.2.1 erweitert kanonisch die Definition der Quantilsfunktion aus [Bücher(b)], [Kabluchko] und wird sehr ähnlich in [Löwe, Def 1.11] gegeben. Wohingegen beispielsweise in [Embrechts und Hofert] und [Resnick, S. 3] Argumente aus $\mathbb{R}$ zulässig sind, was seinerseits zu unendlichen Werten führen kann.

Im folgenden Lemma geben wir eine Liste von Eigenschaften der generalisierten Inverse, die wir anschließend frequent nutzen werden.

Lemma 2.2.3 (Eigenschaften der generalisierten Inversen)**.**
In der Situation aus Definition 2.2.1 gelten für H^{-1} folgende Eigenschaften:

(a) *H^{-1} entspricht der Inversen, falls H bijektiv ist.*

(b) *H^{-1} ist isoton.*

(c) *$H\left(H^{-1}(y) - \varepsilon\right) < y$ für alle $\varepsilon > 0$ dergestalt, dass $H^{-1}(y) - \varepsilon \in W$ und $H\left(H^{-1}(y) + \varepsilon\right) \geq y$ für alle $\varepsilon > 0$ dergestalt, dass $H^{-1}(y) + \varepsilon \in W$.*

(d) *H^{-1} ist linksstetig.*

(e) *$H^{-1}(H(x)) \leq x$.*

(f) *$H(H^{-1}(y)) \geq y$, falls H rechtsstetig ist.*

(g) *$(H^{-1})^{-1}(x) = H(x-)$, falls H^{-1} nicht-konstant ist.*

Beweis. (a) Ist H bijektiv, so existiert für alle $x \in W$ genau ein y mit $H(x) = y$. In Verbindung mit der Isotonie von H liefert dies die Behauptung.

(b) Gälte die Nicht-Isotonie, also für $y_1 < y_2$, dass $H^{-1}(y_1) > H^{-1}(y_2)$, so würde ein $\delta > 0$ mit $H^{-1}(y_1) > H^{-1}(y_2) + \delta$ existieren. Nach der Definition von H^{-1} würde dies $y_1 > H(H^{-1}(y_2) + \delta) \geq y_2$ nach sich ziehen, was jedoch $y_1 < y_2$ widerspräche.

(c) Wäre in der Situation der ersten Aussage $H(H^{-1}(y) - \varepsilon) \geq y$, so müsste $H^{-1}(y) \leq H^{-1}(y) - \varepsilon$ nach der Definition von H^{-1} gelten, was in sich widersprüchlich wäre. Der Beweis der anderen Aussage verläuft völlig analog.

(d) Sei y_n eine in D von unten gegen y konvergierende Folge.
Für diese Folge gilt dann nach Rechenregeln für Limiten

$$H(x) \geq y \text{ genau dann, wenn } H(x) \geq y_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir nehmen an, es gälte $H^{-1}(y-) < H^{-1}(y)$. Dann existierten aufgrund von (b) ein $\varepsilon > 0$ und x derart, dass $H^{-1}(y_n) < x < H^{-1}(y) - \varepsilon$ für alle n. Für x würde dann aufgrund der Definition von H^{-1} die Beziehung $y_n \leq H(x)$ gelten und damit nach Obigem $y \leq H(x)$. Dies stünde jedoch nach (c) im Widerspruch zu $x < H^{-1}(y) - \varepsilon$.

(e) Für x gilt trivialerweise $H(x) \geq H(x)$ und somit liegt x in der Menge, von welcher das Infimum gebildet wird.

(f) Es gilt für $x > H^{-1}(y)$, dass $H(x) \geq y$ ist. Würde nun $H(H^{-1}(y)) < y$ stimmen, so wäre für $\varepsilon > 0$ nach (c)

$$H\big(H^{-1}(y)\big) < y \leq H\big(H^{-1}(y) + \varepsilon\big).$$

Dies widerspräche jedoch der Rechtsstetigkeit der Funktion H.

(g) Wir zeigen $(H^{-1})^{-1}(x) \leq H(x-)$ und $(H^{-1})^{-1}(x) \geq H(x-)$.
Für den Beweis der ersten Ungleichung konvergiere x_n von unten gegen x. Zunächst erhalten wir für diejenigen y mit $y > \lim_{n\to\infty} H(x_n)$ aus der Definition der generalisierten Inverse, dass $H^{-1}(y) > x_n$ für alle n erfüllt ist. Dies impliziert $H^{-1}(y) \geq x$. Insgesamt muss also gemäß Definition $H^{-1}(x) \leq \lim_{n\to\infty} H(x_n)$ gelten. Aus der Beliebigkeit der Folge $(x_n)_n$ erhalten wir die erste Ungleichung.

Die umgekehrte Ungleichung beweisen wir, indem wir $(H^{-1})^{-1}(x) \geq H(\tilde{x})$ für alle $\tilde{x} < x$ zeigen. Dafür nehmen wir an, es existiert ein $\hat{x} < x$ mit $(H^{-1})^{-1}(x) < H(\hat{x})$. Dann gälte nach der Definition der Inversen jedoch einerseits

$$H^{-1}(H(\hat{x})) \geq x$$

und andererseits nach der Annahme in Verbindung mit (e)

$$H^{-1}(H(\hat{x})) \leq \hat{x} < x,$$

was kontradiktär wäre. □

Bemerkung 2.2.4.
In Lemma 2.2.3(f) kann nicht auf die Voraussetzung der Rechtsstetigkeit verzichtet

werden, was man mit der Funktion $H(x) = x \cdot \mathbb{1}\{x \leq 1\} + 2 \cdot \mathbb{1}\{x > 1\}$ einsieht, da $H(H^{-1}(2)) = 1$ kleiner als 2 ist.
Weiterhin verliert diese Aussage ihre Richtigkeit, falls man die generalisierte Inverse beispielsweise gemäß [Resnick, S. 3] definiert.[2]

Folgender Satz ist eine Verallgemeinerung von [Bücher(b), Lemma 3.4] und offenbart die Beziehung zwischen Konvergenz der Funktionenfolge und der inversen Funktionenfolge. Man vergleiche auch mit [Resnick, Exc. 0.2.3].

Satz 2.2.5 (Inversionstheorem)**.**
Es seien $H, H_1, H_2, \ldots :]a, b[\to \mathbb{R}$ nicht-konstante, isotone Funktionen.
Dann sind äquivalent:

(i) $H_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} H(x)$ *für alle Stetigkeitspunkte x von H.*

(ii) $H_n^{-1}(y) \xrightarrow{n\to\infty} H^{-1}(y)$ *für alle Stetigkeitspunkte y von H^{-1}.*

Beweis. Wir zeigen die Rückrichtung, indem wir

$$\limsup_{n\to\infty} H_n(x) \leq H(x) \;\text{ und }\; \liminf_{n\to\infty} H_n(x) \geq H(x)$$

klären. Anschließend folgt durch Einschnürung $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(x) = H(x)$ für alle Stetigkeitsstellen x.
Für die erste Ungleichung seien $x' > x$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Eine isotone Funktion hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen, vergleiche [Hewitt und Stromberg, Thm. 8.19]. Daher wählen wir eine Stetigkeitsstelle $y := y(x')$, der nach Lemma 2.2.3(b) isotonen Funktion H^{-1}, die

$$H(x') < y < H(x') + \varepsilon \tag{2.5}$$

erfüllt. Dies liefert seinerseits $H^{-1}(y) \geq x' > x$ und für große n lässt uns die Voraussetzung der Konvergenz $x < H_n^{-1}(y)$ schließen. Also existiert ein $\delta > 0$, sodass $x < H_n^{-1}(y) - \delta$ ist und demnach liefern Lemma 2.2.3 (b) und (c) die Ungleichung $H_n(x) < y$. Damit folgt in Verbindung mit (2.5) insbesondere $H_n(x) < H(x') + \varepsilon$. Es sind $x' > x$ und $\varepsilon > 0$ beliebig und x eine Stetigkeitsstelle von H. Daher resultiert eine Grenzwertbildung in

$$\limsup_{n\to\infty} H_n(x) \leq H(x)$$

und die erste Ungleichung ist gezeigt.

Für die andere Ungleichung seien nun $x' < x$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Mit derselben Argumentationsstruktur wie im ersten Fall finden wir eine derartige Stetigkeitsstelle $y := y(x')$ von H^{-1}, dass

$$H(x') - \varepsilon < y < H(x') \leq H(x)$$

gilt. Wie in der ersten Ungleichung erhalten wir für große n die Beziehung
$H(x') - \varepsilon < H_n(x)$. Da x eine Stetigkeitsstelle ist erhalten wir nach einer Grenzwertbildung

$$H(x) \leq \liminf_{n\to\infty} H_n(x),$$

[2] So wird in [Embrechts und Hofert, Abschnitt 3.2 Statement 2] auf Fehlschlüsse in der Literatur wie beispielsweise [Resnick, Ungleichung (0.6b)] hingewiesen, die gerade aus dem Grund entstehen, dass beliebige Argumente zugelassen werden und somit etwa nicht endliche Werte resultieren können.

was den Beweis der Rückrichtung abschließt.

Der Beweis der Hinrichtung kann sehr ähnlich geführt werden, sodass wir den Beweis an dieser Stelle beenden. □

3 Erweiterungen der regulären Variation

Der Begriff der regulären Variation hat sich als äußerst hilfreich herausgestellt, um die Max-Anziehungsbereiche der Fréchet- und Weibull-Verteilungen zu charakterisieren. Im Falle des Gumbel Max-Anziehungsbereiches ist jene Form der Variation jedoch nicht mehr ausreichend, sodass wir erweiterte Formen der regulären Variation einführen werden.

3.1 Die asymptotische Äquivalenz und reguläre Variation

Zunächst wiederholen wir die obigen zentralen Begriffe und klären grundlegende Eigenschaften, welche wir bisweilen konkludent anwenden.

Definition 3.1.1 (Asymptotische Äquivalenz)**.**
Zwei Funktionen $f, g\colon]a,b[\to \mathbb{R}^+$ heißen **asymptotisch äquivalent** (in b), falls

$$\lim_{x\uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

gilt, dabei seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Wir notieren dies als $f \sim g$ oder $f \overset{x\uparrow b}{\sim} g$. Weiterhin lassen wir Funktionen zu, die initial nichtpositive Werte annehmen, jedoch in der Nähe von b lediglich positiv sind. Formal wird dies dadurch legitimiert, dass Abänderungen auf Bereichen, die einen positiven Abstand zu dem Eckpunkt b besitzen, auf das Grenzverhalten keinen Einfluss haben.

Die bekannten Rechenregeln für Limiten lassen uns folgende Eigenschaften erkennen.

Bemerkung 3.1.2.
Es seien $f_1, f_2, g_1, g_2\colon]a,b[\to \mathbb{R}^+$ Funktionen mit $f_1 \sim f_2$ und $g_1 \sim g_2$. Dann gelten:

(1) $f_1 \cdot g_1 \sim f_2 \cdot g_2$.

(2) $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$.

(3) Die asymptotische Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf jeder Teilmenge von $\mathrm{Abb}(\,]a,b[\,,\mathbb{R})$, wobei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ fest ausgewählt seien.

Beweis. (1) Dies folgt aus bekannten Rechenregeln für Limiten.

(2) Für beliebiges $\varepsilon > 0$ sei x derart nah an b, dass

$$\max\left\{\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - 1\right|, \left|\frac{g_1(x)}{g_2(x)} - 1\right|\right\} \leq \varepsilon$$

ist. Mithilfe dieser Ungleichung generieren wir

$$\begin{aligned} \big|f_1(x) + g_1(x) - \big(f_2(x) + g_2(x)\big)\big| &\leq |f_1(x) - f_2(x)| + |g_1(x) - g_2(x)| \\ &= \left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - 1\right| \cdot f_2(x) + \left|\frac{g_1(x)}{g_2(x)} - 1\right| \cdot g_2(x) \\ &\leq \varepsilon \cdot \big(f_2(x) + g_2(x)\big), \end{aligned}$$

Eine Division der Ungleichung durch $f_2(x) + g_2(x)$, was zulässig ist, da die Funktionen positiv sind, finalisiert den Beweis.

(3) Die Eigenschaften der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität ergeben sich instantan aus den Rechenregeln für Limiten. □

Definition 3.1.3 (Reguläre und langsame Variation)**.**
Eine messbare Funktion $R\colon]a, \infty[\to \mathbb{R}^+$ heißt **regulär variierend mit Index** $\rho \in \mathbb{R}$, falls

$$\lim_{x \to \infty} \frac{R(\lambda x)}{R(x)} = \lambda^\rho, \text{ für jedes } \lambda > 0,$$

gilt. Wir bezeichnen dies mit $R \in \mathrm{RV}_\rho$ und nennen die Funktion im Fall $\rho = 0$ auch **langsam variierend**.

An dieser Stelle erinnern wir an grundlegende Struktureigenschaften der regulären Variation und beweisen Erstere exemplarisch.

Bemerkung 3.1.4.
Sind R und S Funktionen mit selben Definitions- und Wertebereichen wie in Definition 3.1.3, dann gelten:

(1) Falls $R \in \mathrm{RV}_\rho$ und $R \sim S$, so gilt bereits $S \in \mathrm{RV}_\rho$.

(2) Sind R und $S \in \mathrm{RV}_\rho$, so auch die Summe $R + S$.

Beweis. (1) Sei $\lambda > 0$ fest, aber beliebig. Wir renotieren und nutzen die Annahmen

$$\frac{S(\lambda x)}{S(x)} = \frac{S(\lambda x)}{R(\lambda x)} \cdot \frac{R(\lambda x)}{R(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1 \cdot \lambda^\rho \cdot 1 = \lambda^\rho.$$

(2) Völlig analog zum Beweis von Bemerkung 3.1.2(2) bemerken wir für ein $\varepsilon > 0$ und große x

$$\big|R(\lambda x) + S(\lambda x) - \lambda^\rho \cdot \big(R(x) + S(x)\big)\big| \leq \varepsilon \cdot \big(R(x) + S(x)\big).$$

Eine Division dieser Ungleichung durch $R(x) + S(x) > 0$ liefert die Behauptung. □

Wir erkennen durch Bemerkung 3.1.4(1), dass wir bezüglich regulärer Variation nicht auf Eindeutigkeit hoffen dürfen. Mithin sollten wir bezüglich dieser Theorie nicht zwischen asymptotisch äquivalenten Funktionen unterscheiden. In dieser Arbeit werden wir keine Quotientenstruktur ansetzen, obwohl dies durch Obiges nahegelegt wird. Für eine Verfolgung dieses Ansatzes sichte man [Bingham et al. S. 46f].
Auf eine Komplettierung der Theorie der regulären Variation verzichten wir an dieser Stelle und verweisen auf die umfängliche Darstellung in [Bingham et al.]. Dennoch werden wir in dieser Arbeit einige Dependenzen und Analogien zwischen den erweiterten Formen der Variation und der regulären Variation herausarbeiten und aufzeigen.

3.2 Gamma-Variation

Wir führen die Gamma-Variation ein und weichen von der in [Resnick, S. 26] vorgeschlagenen Variante insofern ab, als dass wir eine Nichtnegativitätsbedingung an die Eckpunkte des Definitionsbereiches stellen. Dies erzwingt die Nichtnegativität der generalisierten Inverse einer Gamma-variierenden Abbildung.

Definition 3.2.1 (Gamma-Variation)**.**
Eine isotone Funktion $U\colon\,]a,b[\ \to \mathbb{R}$ heißt **Gamma-variierend mit Indexfunktion** f, falls folgende zwei Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $U(b-) := \lim_{x\uparrow b} U(x) = +\infty$.

(ii) Es existiert eine auf $]a,b[$ definierte positive und messbare Funktion f dergestalt, dass

$$\lim_{t\uparrow b} \frac{U(t + x \cdot f(t))}{U(t)} = e^x, x \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Hierbei seien $0 \leq a < b \leq +\infty$.
Wir schreiben U ist **Gamma-variierend**, wenn gerade die Indexfunktion f nicht von weiterem Interesse ist.
Man beachte, dass aufgrund der Isotonie und (i) ab einem $x \in\,]a,b[$ bereits $U(x) > 0$ gilt. Damit ist der Grenzwert in (3.1) wohldefiniert.

Bemerkung 3.2.2.
Die Bedingung an a und b ist nicht einschränkend für die Gamma-Variation, da nur das Grenzverhalten von U bei b von Bedeutung ist. Genauer bedeutet dies:
Sei $\tilde{U}$ eine Funktion die (i) und (ii) erfüllt für die jedoch die Nichtnegativitätsbedingung an die Eckpunkte verletzt ist und $\tilde{f}$ die zu $\tilde{U}$ gehörige Indexfunktion. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Der linke Eckpunkt sei negativ und der rechte nichtpositiv. Dann wird durch $U\colon\,]0,1[\ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tilde{U}(x + b - 1)$ eine Transformation gegegeben, sodass die Eckpunkte nichtnegativ sind und U Gamma-variierend mit der Indexfunktion $f(t) := \tilde{f}(t + b - 1)$ ist.

2. Nehmen wir an, der linke Eckpunkt sei negativ und der rechte positiv, so ist $U\colon\,]0,b[\ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tilde{U}(x)$ Gamma-variierend mit nichtnegativen Eckpunkten.

Dies bedeutet im Wesentlichen, solch eine Funktion $\tilde{U}$ ist bis auf eine marginale Abänderung bereits Gamma-variierend.

Beweis. 1. Zunächst erfüllt U Eigenschaft (i):

$$\lim_{x\uparrow 1} U(x) = \lim_{x\uparrow 1} \tilde{U}(x + b - 1) = \lim_{x\uparrow b} \tilde{U}(x) = +\infty.$$

Außerdem gilt auch (ii):

$$\lim_{t\uparrow 1} \frac{U(t + x \cdot f(t))}{U(t)} = \lim_{t\uparrow 1} \frac{\tilde{U}(t + x \cdot \tilde{f}(t + b - 1) + b - 1)}{\tilde{U}(t + b - 1)} = \lim_{t\uparrow b} \frac{\tilde{U}(t + x \cdot \tilde{f}(t))}{\tilde{U}(t)} = e^x.$$

Die Forderungen an die Eckpunkte a und b sind nach Konstruktion erfüllt.

2. Dieser Fall ist trivial, da sowohl (i) als auch (ii) unberührt bleiben, sodass lediglich die Positivitätsbedingung zu überprüfen ist, die jedoch nach Konstruktion gilt. □

Wir führen mit einer Angabe Gamma-variierender Funktionen fort, was uns die wichtige Erkenntnis verschafft, dass die Klasse der Gamma-variierenden Funktionen ergiebig ist. Für 3.2.3(4) vergleiche man mit [Resnick, Exc. 0.4.3.7].

Beispiel 3.2.3.
Die folgenden Funktionen sind Gamma-variierend, wobei jede Abbildung von $\mathbb{R}^+$ abbilde:

(1) $\exp(x)$.

(2) $\exp(x) + r(x)$, wobei $r(x)$ isoton sei und $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{r(t)}{\exp(t)} = 0$ gelte.

(3) $\exp(cx)$, für ein $c \in \mathbb{R}^+$.

(4) Es sei $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ eine differenzierbare Abbildung mit $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t) = 0$ und $\frac{1}{f}$ (Lebesgue-) integrierbar. Dann ist die Abbildung

$$U(x) := \exp\left(\int_0^x \frac{1}{f(u)}\, du\right)$$

Gamma-variierend mit Indexfunktion f.

(5) Es sei $f(t) = t^\alpha$ und $\alpha \in]0, 1[$. Die Abbildung

$$U(x) := \exp\left(\int_0^x \frac{1}{f(u)}\, du\right) = \exp\left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)$$

ist Gamma-variierend mit Indexfunktion f.

Beweis. (1) folgt als Spezialfall aus (2).

(2) Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ unter Nutzung der Voraussetzung

$$\frac{r(t+x)}{\exp(t)} = \frac{r(t+x)}{\exp(t+x)} \cdot \frac{\exp(t+x)}{\exp(t)} = \frac{r(t+x)}{\exp(t+x)} \cdot \exp(x) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Unter Einbringung dieser Erkenntnis und der Voraussetzung folgt

$$\frac{\exp(t+x) + r(t+x)}{\exp(t) + r(t)} = \frac{\exp(x) + \frac{r(t+x)}{\exp(t)}}{1 + \frac{r(t)}{\exp(t)}} \xrightarrow[t\to\infty]{} e^x,$$

und somit (3.1) mit der Indexfunktion $f \equiv 1$.

(3) Wir rechnen

$$\frac{\exp\left(c \cdot \left(t + x \cdot \frac{1}{c}\right)\right)}{\exp(c \cdot t)} = e^x,$$

weswegen die Abbildung Gamma-variierend mit Indexfunktion $f \equiv \frac{1}{c}$ ist.

(4) Wir setzen hilfsweise $g := \frac{1}{f}$ und verifizieren (3.1), also

$$\frac{\exp\left(\int_0^{t+x\cdot f(t)} g(u)\, du\right)}{\exp\left(\int_0^t g(u)\, du\right)} = \exp\left(\int_t^{t+x\cdot f(t)} g(u)\, du\right) \xrightarrow[t\to\infty]{(!)} e^x.$$

Aufgrund der Folgenstetigkeit der Exponentialfunktion ist es gleichbedeutend die Konvergenz des Integrals gegen x zu zeigen.
Die Funktion g ist differenzierbar und daher stetig. Somit garantiert der Mittelwertsatz der Integralrechnung die Existenz einer Zwischenstelle $\xi_t \in [t, t + x \cdot f(t)]$ derart, dass

$$\int_t^{t+x\cdot f(t)} g(u)\, du = x \cdot f(t) \cdot g(\xi_t) = x \cdot \frac{f(t)}{f(\xi_t)}$$

erfüllt ist. Dabei nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $x \geq 0$ gelte, da wir sonst lediglich die Intervallgrenzen vertauschen würden.

Zeigen wir nun die in y lokal gleichmäßige Konvergenz von $\frac{f(t+y\cdot f(t))}{f(t)}$ gegen 1 für t gegen unendlich, so erhalten wir damit

$$0 = \lim_{t\to\infty} \sup_{y\in[0,x]} \left| \frac{f(t+y\cdot f(t))}{f(t)} - 1 \right| \geq \lim_{t\to\infty} \left| \frac{f(\xi_t)}{f(t)} - 1 \right| \geq 0$$

und daher

$$\int_t^{t+x\cdot f(t)} g(u)\,du = x \cdot \frac{f(t)}{f(\xi_t)} \xrightarrow{t\to\infty} x,$$

was nach obiger Erklärung die Behauptung verifizieren würde. Wir merken an, dass $f(t+y\cdot f(t))$ auch für negative y im Grenzverhalten wohldefiniert ist, da

$$\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

gilt, was wir im weiteren Verlauf des Beweises zeigen werden.
Für den Beweis der oben behaupteten lokal gleichmäßigen Konvergenz schreiben wir zunächst mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$f\big(t+y\cdot f(t)\big) - f(t) = y\cdot f(t)\cdot f'\big(\xi_t(y)\big),$$

wobei $\xi_t(y)$ eine Stelle zwischen $[t, t+y\cdot f(t)]$ bezeichne und wir erneut ohne Einschränkung annehmen, dass $y \geq 0$ gelte. Diese Beziehung liefert nach einer Division durch $f(t) > 0$.

$$\frac{f\big(t+y\cdot f(t)\big)}{f(t)} - 1 = y\cdot f'\big(\xi_t(y)\big). \tag{3.2}$$

Weiterhin gilt für beliebige reelle kompakte Intervalle K

$$\sup_{y\in K} \left| \frac{t+y\cdot f(t)}{t} - 1 \right| = \sup_{y\in K} \left| y\cdot \frac{f(t)}{t} \right| \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

Denn mit einer Regel von de l'Hospital, siehe [Amann und Escher, Satz 2.21], folgt

$$\frac{f(t)}{t} \sim \frac{f'(t)}{1} \xrightarrow{t\to\infty} 0,$$

da der Nenner bestimmt divergiert, beide Abbildungen differenzierbar in t sind und nach Voraussetzung $f'(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ gilt.
Daraus folgt, unter Beachtung, dass $t \leq \xi_t(y) \leq t+y\cdot f(t)$ ist, insbesondere die lokal gleichmäßige Konvergenz von $\frac{\xi_t(y)}{t}$ gegen 1 und demnach auch $\sup\limits_{y\in K} f'\big(\xi_t(y)\big) \xrightarrow{t\to\infty} \infty$, wobei wir uns erneut $f'(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ bedient haben. Letztendlich erhalten wir mittels dieser lokal gleichmäßigen Konvergenz und (3.2)

$$\sup_{y\in K} \left| \frac{f\big(t+y\cdot f(t)\big)}{f(t)} - 1 \right| = \sup_{y\in K} \big| y\cdot f'\big(\xi_t(y)\big)\big| \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

Nach obiger Argumentation ist U Gamma-variierend mit Indexfunktion f.

(5) Dieses Beispiel resultiert aus einer direkten Anwendung von (4), denn f besitzt die dort postulierten Eigenschaften. □

Das Beispiel 3.2.3(4) ist ein Spezialfall der sogenannten *self-neglecting functions*. Es zeigt sich, dass Indexfunktionen von Gamma-variierenden Abbildungen immer solche sind. Dies ermöglicht eine Darstellungstheorie der Gamma-Variation vergleichbar mit jener der regulären Variation. Diese Einsicht und Bezeichnung wird in
[Bingham et al. S.120, 178 ff.] präsentiert, wobei dort die Gamma-Variation verschieden zu der in dieser Arbeit und in [Resnick] definiert wird.

Wie bei regulär-variierenden Funktionen gilt hier ein Satz über die gleichmäßige Konvergenz. Der Beweis gestaltet sich jedoch an dieser Stelle, wegen der Monotonie der Funktion U und ihrer Positivität in der Nähe des Endpunktes, unter Zuhilfenahme von Resultaten aus Kapitel 2 deutlich kürzer.

Satz 3.2.4 (Satz über die gleichmäßige Konvergenz Gamma-variierender Funktionen)**.** *Die Abbildung $U :]a, b[\to \mathbb{R}$ sei Gamma-variierend. Dann ist die Konvergenz in (3.1) bereits lokal gleichmäßig.*

Beweis. Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $t_n \xrightarrow{n\to\infty} b$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$H_n(x) := \frac{U\big(t_n + x \cdot f(t_n)\big)}{U(t_n)}$$

und bemerken, aufgrund von Definition 3.2.1(i), für großes n die Isotonie der Abbildung in x. Die Funktionenfolge $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach Voraussetzung punktweise gegen die stetige Funktion $\exp(x)$. Die Konklusion auf lokal gleichmäßige Konvergenz ist somit nach Satz 2.1.4 valide. □

In Definition 3.1.1 der Gamma-variierenden Funktionen wurde die Existenz einer Indexfunktion f gefordert. Eine initiale Untersuchungsstelle wäre daher zu klären, ob eine Funktion U mit f_1 und f_2 Gamma-variierend sein könnte und in welchem Zusammenhang diese dann stünden; diese bereinigt das untenstehende Lemma. Unangemerkt sollten wir an dieser Stelle nicht lassen, dass eine Anwendung des *Convergence of Types Theorem*, siehe etwa [Billingsley, S. 204 ff.] für einen Beweis ohne die Nutzung der *Skorohod-Darstellung*, eine alternative Beweismöglichkeit darstellt; wie in
[Resnick, S. 26] präsentiert. Wir beweisen dies jedoch elementar.

Lemma 3.2.5.
Sei f_2 eine positive, messbare Abbildung von $]a, b[$ und U Gamma-variierend mit Indexfunktion f_1, dann sind äquivalent:

(i) U ist Gamma-variiend mit Funktion f_2.

(ii) Es gilt $\lim\limits_{t\uparrow b} \frac{f_1(t)}{f_2(t)} = 1$.

Beweis. Die Hinrichtung zeigen wir beginnend, indem wir annehmen, dass *(ii)* nicht gälte. Dann gäbe es eine Folge $t_n \xrightarrow{n\to\infty} b$, sodass für ein $c > 0$ ohne Einschränkung

$$\frac{f_1(t_n)}{f_2(t_n)} \geq 1 + c, \text{ man beachte } f_1 \text{ und } f_2 \text{ sind positiv,}$$

gelten würde; denn für den gespiegelten Fall könnten wir durch ein Vertauschen der Rollen von f_1 und f_2 ganz analog verfahren. Die Forderung, dass dies für alle $n \in \mathbb{N}$

gelte, rechtfertigten wir damit, dass wir sonst zu der jeweiligen Teilfolge übergingen. Wir erhielten mit der Isotonie von U

$$\frac{U\Big(t_n + 1 \cdot f_1(t_n)\Big)}{U(t_n)} = \frac{U\Big(t_n + 1 \cdot f_2(t_n) \cdot \frac{f_1(t_n)}{f_2(t_n)}\Big)}{U(t_n)} \geq \frac{U\Big(t_n + (1+c) \cdot f_2(t_n)\Big)}{U(t_n)}.$$

In Verbindung mit (3.1) liefert eine Grenzwertbildung $e^1 \geq e^{1+c}$ und somit die Kontradiktion.

Für die Rückrichtung gelte die Grenzwertbeziehung aus *(ii)* und es sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest. Der Satz über die gleichmäßige Konvergenz generiert, auf x enthaltenden Kompakta, ebenjene Konvergenz in (3.1) und damit impliziert Lemma 2.1.3 die stetige Konvergenz gegen e^x.
Wir setzen $x_t := x \cdot \frac{f_2(t)}{f_1(t)}$, was nach Vorrausetzung gegen x konvergiert. Wegen der stetigen Konvergenz erhalten wir

$$\frac{U\Big(t + x \cdot f_2(t)\Big)}{U(t)} = \frac{U\Big(t + x \cdot \frac{f_2(t)}{f_1(t)} \cdot f_1(t)\Big)}{U(t)} = \frac{U\Big(t + x_t \cdot f_1(t)\Big)}{U(t)} \xrightarrow{t \uparrow b} e^x,$$

was uns konkludieren lässt, dass U auch Gamma-variierend mit Indexfunktion f_2 ist. □

Zuletzt präsentieren wir ein Lemma mit weiteren Struktureigenschaften der Gamma-Variation und einer Hilfsaussage, welche im Laufe der Arbeit aufgegriffen wird. Weiterhin stellen wir in (c) einen Bezug zu der regulären Variation her. Man vergleiche dafür auch mit [Bingham et al. S. 175], die Spezialfälle von (b) und (c) beweisen und auf die Theorie der *rapidly varying functions* eingehen, welche ebenjene sind, die die Grenzwertrelation in (c) erfüllen.

Lemma 3.2.6.
Für eine Gamma-variierende Funktion U mit Indexfunktion f gilt:

(a) *Sei U_2 eine Abbildung mit denselben Definitions- und Wertebereichen wie U_1 und es geltte zusätzlich $U_1 \sim U_2$, dann ist auch U_2 Gamma-variierend.*

(b) $\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{t \uparrow b} 0.$

(c) $\frac{U(\lambda t)}{U(t)} \xrightarrow{t \uparrow b} \begin{cases} \infty & ,\lambda > 1 \\ 1 & ,\lambda = 1 \\ 0 & ,0 < \lambda < 1 \end{cases}.$
Woran wir ablesen, dass die Menge der regulär variierenden Funktionen zu jener der Gamma-variierenden disjunkt ist.

(d) *Ist $U\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ eine isotone Abbildung, so ist $U(x)$ genau dann Gamma-variierend, wenn $U(x-)$ es ist.*

Beweis. (a) Wir renotieren und nutzen beide Annahmen

$$\lim_{t \uparrow b} \frac{U_2\big(t + x \cdot f(t)\big)}{U_2(t)} = \lim_{t \uparrow b} \left\{ \frac{U_2\big(t + x \cdot f(t)\big)}{U_1\big(t + x \cdot f(t)\big)} \cdot \frac{U_1\big(t + x \cdot f(t)\big)}{U_1(t)} \cdot \frac{U_1(t)}{U_2(t)} \right\} = 1 \cdot e^x \cdot 1 = e^x.$$

Damit folgt die Aussage in (a).

(b) Zunächst ist der Quotient letztendlich wohldefiniert, da in der Definition der Gamma-Variation $b > 0$ gefordert wird. Wir unterscheiden danach, ob b endlich ist. Gemäß der Definition der Gamma-Variation muss $t + 1 \cdot f(t) < b$ für t nahe b gelten, sodass in Verbindung mit der Positivität von f die Behauptung im Falle der Endlichkeit folgt.

Es sei nun $b = \infty$. Wegen $U(t) \xrightarrow{t\to\infty} \infty$ muss aufgrund von (3.1) die Grenzwertbeziehung $t + x \cdot f(t) \xrightarrow{t\to\infty} \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also insbesondere für beliebige negative Zahlen, gelten. Daher kann $\frac{f(t)}{t}$ nicht nach unten durch eine positive Zahl beschränkt werden. Damit ist (b) gezeigt.

(c) Wir behandeln den Fall $\lambda > 1$ zuerst. Nach (b) gilt für feste, aber beliebige, $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{t + x \cdot f(t)}{\lambda t} \xrightarrow{t\uparrow b} \lambda^{-1}$$

und somit insbesondere für t nahe b die Abschätzung $\lambda t > t + x \cdot f(t)$. Dies ausnutzend erhalten wir in Verbindung mit (3.1) und der Isotonie von U

$$\liminf_{t\uparrow b} \frac{U(\lambda t)}{U(t)} \geq \liminf_{t\uparrow b} \frac{U\big(t + x \cdot f(t)\big)}{U(t)} = e^x$$

gleichmäßig in x. Die Aussage folgt in diesem Fall aus der Unbeschränktheit der Exponentialfunktion.

Sei nun $\lambda < 1$. Mittels analoger Argumente erhalten wir für feste $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $\lambda t < t + x \cdot f(t)$, wenn t nahe b ist. Infolgedessen konkludieren wir unter Beachtung, dass U aufgrund von Definition 3.2.1(i) letztendlich positiv ist

$$0 \leq \limsup_{t\uparrow b} \frac{U(\lambda t)}{U(t)} \leq \limsup_{t\uparrow b} \frac{U\big(t + x \cdot f(t)\big)}{U(t)} = e^x.$$

Die Aussage folgt aus der Tatsache $\lim_{x\downarrow -\infty} e^x = 0$.

(d) Falls wir die asymptotische Äquivalenz von U und $U(-)$ in beiden Richtungen gezeigt haben, folgt die Behauptung aus (a). Dafür sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

In der Situation der Hinrichtung gilt aufgrund der Isotonie von U und der Tatsache, dass f positiv ist

$$\frac{U\big(t + (0-\varepsilon) \cdot f(t)\big)}{U(t)} = \frac{U\big(t - \varepsilon \cdot f(t)\big)}{U(t)} \leq \frac{U(t-)}{U(t)} \leq \frac{U(t)}{U(t)} = 1.$$

Eine Grenzwertbildung liefert in Verbindung mit (3.1)

$$e^{-\varepsilon} \leq \frac{U(t-)}{U(t)} \leq 1$$

und aufgrund der Beliebigkeit des $\varepsilon > 0$ folgt daraus die asymptotische Äquivalenz. Die Rückrichtung funktioniert analog. □

Für eine erschöpfende Analyse der Gamma-Variation, welche unter anderem Darstellungstheorie und Analsye bezüglich Abgeschlossenheit unter Operationen umfasst, konsultiere man [Bingham et al. Abschnitt 3.10].

3.3 Pi-Variation

Diese Form der Variation wird sich als spezielle Subklasse der langsamen Variation herausstellen. Wir folgen nicht der Definition in [Resnick, S. 27], sondern geben eine Definition mit initial weitaus geringeren Restriktionen.

Definition 3.3.1 (Pi-Variation)**.**
Eine nichtnegative und isotone Abbildung $V\colon]z,\infty[\to \mathbb{R}_0^+$ heißt **Pi-variierend mit Funktion** $a(t)$, falls Funktionen $a(t) > 0$, $b(t) \in \mathbb{R}$ von $]z,\infty[$ derart existieren, dass für alle $x > 0$ die Beziehung

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V(tx) - b(t)}{a(t)} = \log x \tag{3.3}$$

erfüllt ist, dabei sei z eine reelle Zahl oder $-\infty$. Wie bei der Gamma-Variation nennen wir bisweilen V **Pi-variierend**, falls die konkrete Form der Funktion $a(t)$ nicht von Belang ist.

Wir untersuchen im Folgenden die Funktionen $a(t)$, $b(t)$ und charakterisieren die Pi-Variation mittels spezieller Wahlen ebenjener Funktionen.

Satz 3.3.2.
Sei V eine Pi-variierende Abbildung mit Funktion $a(t)$, so gilt:

(a) *V ist Pi-variierend mit Funktion $a_1(t) > 0$ genau dann, wenn $a \sim a_1$.*

(b) *Erfüllen die Funktionen b, b_1 beide Beziehung (3.3), so gilt $\frac{b(t)-b_1(t)}{a(t)} \xrightarrow{t\to\infty} 0$.*
Halten umgekehrt für $b(t)$ die Relationen (3.3) und $\frac{b(t)-b_1(t)}{a(t)} \xrightarrow{t\to\infty} 0$, dann gilt (3.3) schon mit $b_1(t)$.

(c) *Die Abbildung V ist messbar und es ist möglich $a(t)$ ebenso wie $b(t)$ als messbar zu wählen.*

Beweis. (a) Erfüllen sowohl $a(t)$ als auch $a_1(t)$ die Relation (3.3), so folgt mit der speziellen Wahl $x = e$

$$\frac{a_1(t)}{a(t)} = \frac{V(t\cdot e) - b(t)}{a_1(t)} \cdot \frac{a_1(t)}{V(t\cdot e) - b(t)} \xrightarrow{t\to\infty} \log(e)\cdot\log(e)^{-1} = 1,$$

wobei t so groß sei, dass $V(t \cdot e) > b(t)$ gilt, was wegen (3.3) für große t garantiert ist; dies sichert die Wohldefiniertheit des Ausdrucks.
Nun gelte $a_1 \sim a$, was uns konkludieren lässt

$$\frac{V(tx) - b(t)}{a_1(t)} = \frac{V(tx) - b(t)}{a(t)} \cdot \frac{a(t)}{a_1(t)} \xrightarrow{t\to\infty} \log x \cdot 1.$$

(b) Zunächst mögen $b(t)$ und $b_1(t)$ Beziehung (3.3) erfüllen. Damit folgt

$$\frac{b(t) - b_1(t)}{a(t)} = \frac{V(t\cdot e) - b_1(t)}{a(t)} - \frac{V(t\cdot e) - b(t)}{a(t)} \xrightarrow{t\to\infty} 1 - 1 = 0.$$

Für den anderen Teil der Aussage erfülle $b(t)$ die Grenzwertrelation $\frac{b(t)-b_1(t)}{a(t)} \xrightarrow{t\to\infty} 0$ sowie (3.3). Dies generiert

$$\frac{V(tx) - b_1(t)}{a(t)} = \frac{V(tx) - b(t)}{a(t)} + \frac{b(t) - b_1(t)}{a(t)} \xrightarrow{t\to\infty} \log x + 0.$$

(c) V ist als monotone Funktion messbar. Nun gelte (3.3) für Funktionen $a_1(t), b_1(t)$. Wir sehen
$$\frac{b_1(t) - V(t)}{a(t)} = -\frac{V(t \cdot 1) - b_1(t)}{a(t)} \xrightarrow{t \to \infty} -\log(1) = 0$$
und folgern aus (b) die Zulässigkeit der Wahl $b(t) = V(t)$.
Aufgrund der Grenzwertrelation
$$\frac{V(t \cdot e) - V(t)}{a_1(t)} \xrightarrow{t \to \infty} \log(e) = 1$$
ist nach (a) die Beziehung (3.3) mit $a(t) := V(t \cdot e) - V(t)$ erfüllt. Wir bemerken, dass für große Werte von t die Differenz $V(t \cdot e) - V(t)$ positiv sein muss, sodass der Quotient letztendlich wohldefiniert ist und vorher geeignet abgeändert werden kann. □

Satz 3.3.3 (Charakterisierung der Pi-Variation).
Eine nichtnegative, isotone Funktion $V\colon]z,\infty[\to \mathbb{R}_0^+$ ist Pi-variierend genau dann, wenn eine messbare Funktion $a(t) > 0$ von $]z,\infty[$ derart existiert, dass für alle $x > 0$
$$\lim_{t \to \infty} \frac{V(tx) - V(t)}{a(t)} = \log x \tag{3.4}$$
erfüllt ist. Dabei sei z reell oder $-\infty$.

Beweis. Die Hinrichtung folgt aus Satz 3.3.2(c) und insbesondere aus seinem Beweis. Für die Rückrichtung setze man $b(t) = V(t)$ in Definition 3.3.1. □

Bemerkung (Satz über die gleichmäßige Konvergenz Pi-variierender Funktionen).
Wie in den Fällen der regulären und Gamma-Variation erhält man auch hier eine lokal gleichmäßige Konvergenz. Der Beweis kann analog zu Satz 3.2.4 geführt werden.

Beispiel 3.3.4.
Folgende Funktionen sind Pi-variierend:

(1) $\log(c \cdot x) + r(x)$, wobei $r(x)$ isoton sei und $\lim_{t \to \infty} r(t) = 0$ für ein festes $c > 0$ gelte.

(2) $((1-\alpha) \cdot \log x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, für ein $\alpha \in]0,1[$.

Wir bemerken, dass (2) aus Bsp 3.2.3(5) durch Inversion hervorgeht.[3]

Beweis. (1) Setzen wir die Wahl $a(t) \equiv 1$ in (3.4) ein, so folgt die Behauptung aufgrund der Voraussetzungen instantan.

(2) Erneut prüfen wir (3.4), wobei wir hier
$$a(t) = ((1-\alpha) \cdot \log(te))^{\frac{1}{1-\alpha}} - ((1-\alpha) \cdot \log(t))^{\frac{1}{1-\alpha}}$$
setzen.
Unter Zuhilfenahme einer Regel von de l'Hospital erhalten wir die folgende, den Beweis finalisierende, Relationskette:

[3] Das Verhalten, der Invertierten einer Gamma-variierenden Funktion seinerseits Pi-variierend zu sein, ist systematisch. Dies wird in dem Subkapitel 3.4 erläutert.

$$
\begin{aligned}
&\frac{((1-\alpha)\cdot\log(tx))^{\frac{1}{1-\alpha}}-((1-\alpha)\cdot\log t)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{((1-\alpha)\cdot\log(te))^{\frac{1}{1-\alpha}}-((1-\alpha)\cdot\log t)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\\
&=\frac{\log(tx)^{\frac{1}{1-\alpha}}-\log^{\frac{1}{1-\alpha}} t}{\log(te)^{\frac{1}{1-\alpha}}-\log^{\frac{1}{1-\alpha}} t}\\
&=\frac{\left(\frac{\log(tx)}{\log t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}-1}{\left(\frac{\log(te)}{\log t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}-1}\\
&\sim\frac{1-\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{\left(\frac{\log(tx)}{\log t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\cdot\frac{\log t-\log(tx)}{t\cdot\log^2 t}}{\left(\frac{\log(te)}{\log t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\cdot\frac{\log t-\log(te)}{t\cdot\log^2 t}}\\
&=\left(\frac{\log(tx)}{\log(te)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\cdot\frac{\log x}{\log e}\xrightarrow{t\to\infty}\log x.
\end{aligned}
$$

□

Lemma 3.3.5.
Sei V Pi-variierend. Dann ist die Funktion $a(t)$ aus (3.3) langsam variierend.

Beweis. Unter Ausnutzung von (3.3) erhalten wir für $\lambda > 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{a(\lambda t)}{a(t)}&=\frac{a(\lambda t)}{V(e\lambda t)-V(\lambda t)}\cdot\frac{V(e\lambda t)-V(\lambda t)}{a(t)}\\
&=\left(\frac{V(e\lambda t)-V(\lambda t)}{a(\lambda t)}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{V(e\lambda t)-V(t)}{a(t)}-\frac{V(\lambda t)-V(t)}{a(t)}\right)\\
&\xrightarrow{t\to\infty}\log e\cdot(\log(e\lambda)-\log\lambda)=1
\end{aligned}
$$

und somit den Nachweis der konstatierten Eigenschaft. □

Wir stellen im Folgenden den angesprochenen Bezug zu der langsamen Variation her, indem wir zeigen, dass Pi-variierende Funktionen bereits langsam variierend sind. Man vergleiche mit [Resnick, Exc. 0.4.3.1]. Es sei angemerkt, dass die umgekehrte Teilmengenrelation nicht erfüllt ist, da zum Beispiel konstante Abbildungen zwar langsam jedoch nicht Pi-variierend sind.

Satz 3.3.6.
Es sei V eine Pi-variierende Abbildung, dann gilt:

(a) *Die Funktion $a(t)$ erfüllt $\frac{V(t)}{a(t)}\xrightarrow{t\to\infty}\infty$.*

(b) *V ist langsam variierend.*

Beweis. (a) Angenommen die Behauptung gelte nicht, so würde ein $C > 0$ und eine derartige Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ mit $t_n\xrightarrow{n\to\infty}\infty$ existieren, dass $\frac{V(t_n)}{a(t_n)}\leq C$ gelten würde. Insbesondere gälte also für alle $\lambda > 0$

$$
\frac{V\left(\lambda\cdot\frac{t_n}{\lambda}\right)}{a\left(\lambda\cdot\frac{t_n}{\lambda}\right)}\leq C.
$$

Wir setzen $\tilde{t}_n := \frac{t_n}{\lambda}$ und beachten $\tilde{t}_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Für eine Wahl von $\lambda > \exp(C+1)$ würde für große n nach Lemma 3.3.5 $\frac{a(t_n)}{a\left(\lambda\cdot\frac{t_n}{\lambda}\right)} \leq 1 + \frac{1}{C}$ gelten. Demnach würde einerseits für große n

$$\frac{V(\lambda\tilde{t}_n) - V(\tilde{t}_n)}{a(\tilde{t}_n)} \leq \frac{V(\lambda\tilde{t}_n)}{a(\tilde{t}_n)} = \frac{V(\lambda\tilde{t}_n)}{a\left(\lambda\cdot\frac{t_n}{\lambda}\right)} \cdot \frac{a(t_n)}{a\left(\frac{1}{\lambda}t_n\right)} \leq C+1$$

und andererseits mit (3.3)

$$\frac{V(\lambda\cdot\tilde{t}_n) - V(\tilde{t}_n)}{a(\tilde{t}_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \log(\lambda) > C+1$$

gelten. Wir erhielten somit für große n den Widerspruch

$$C+1 < \frac{V(\lambda\cdot\tilde{t}_n) - V(\tilde{t}_n)}{a(\tilde{t}_n)} \leq C+1.$$

(b) Sei $\lambda > 0$ fest. Mithilfe von (a) erhalten wir

$$\frac{V(t\lambda)}{V(t)} = \frac{V(t\lambda) - V(t) + V(t)}{V(t)} = \frac{V(t\lambda) - V(t)}{a(t)} \cdot \frac{a(t)}{V(t)} + 1 \xrightarrow{t\to\infty} \log\lambda\cdot 0 + 1 = 1.$$

□

3.4 Die Relation zwischen Gamma- und Pi-Variation

Im letzten Subkapitel beweisen wir die inverse Beziehung zwischen den beiden erweiterten Variationsformen. Dazu folgen zunächst für den Beweis wichtige Hilfsresultate, welche jedoch wegen ihrer grundlegenden Struktur auch von eigenständigem Interesse sind.

Lemma 3.4.1.
Für eine Gamma-variierende Abbildung U gilt $\frac{U(U^{-1}(y))}{y} \xrightarrow{y\to\infty} 1$.

Beweis. Wir substituieren $t := t(y) := U^{-1}(y)$ und beachten, dass $y \to \infty$ das Verhalten $t \uparrow b$ impliziert. Lemma 2.2.3(c) führt für beliebige $\varepsilon > 0$ zu den Relationen

$$\begin{aligned}\frac{U\big(t - \varepsilon f(t)\big)}{U(t)} &= \frac{U\big(U^{-1}(y) - \varepsilon f(U^{-1}(y))\big)}{U\left(U^{-1}(y)\right)} < \frac{y}{U\left(U^{-1}(y)\right)} \\ &\leq \frac{U\big(U^{-1}(y) + \varepsilon f(U^{-1}(y))\big)}{U\left(U^{-1}(y)\right)} = \frac{U\big(t + \varepsilon f(t)\big)}{U(t)}.\end{aligned}$$

Weiterhin lässt uns (3.1) die Grenzwerte der Schranken als $e^{-\varepsilon}$ und $e^{+\varepsilon}$ identifizieren, was wegen der positiven Beliebigkeit des ε die Aussage impliziert. □

Bemerkung 3.4.2.
Ist V eine Pi-variierende Abbildung, so gilt entweder $\lim_{t\to\infty} V(t) = \infty$ oder $\lim_{t\to\infty} V(t) = c$ für ein $c > 0$. In beiden Fällen ist der rechte Endpunkt unendlich.

Beweis. Im Falle dass V unbeschränkt ist, folgt die Unmöglichkeit des Oszillierens aus der Monotonie von V.
Ist hingegen V beschränkt, resultiert erneut aus der Monotonie, dass ein Grenzwert existiert, welcher nach Annahme endlich ist.
Nehmen wir an, dass der rechte Endpunkt endlich ist, so würde für große Werte von

t folgen, dass V konstant wäre.
Dann würde jedoch

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V(et) - V(t)}{a(t)} = 0 \neq 1$$

gelten, was (3.3) widerspräche. $\square$

Satz 3.4.3 (Relation zwischen Gamma- und Pi-Variation)**.**
Es seien die Abbildungen $V\colon]z,\infty[\to \mathbb{R}_0^+$ *Pi- und* $U\colon]x_1, x_2[\to \mathbb{R}$ *Gamma-varrierend. Dann gilt:*

(a) V^{-1} *ist Gamma-variierend mit Indexfunktion* $a \circ V^{-1}$.

(b) U^{-1} *ist Pi-variierend und* $f \circ U^{-1}$ *eine zulässige Wahl für* $a(t)$.

Beweis. (a) Es bezeichne $x_t := \lim\limits_{t\to\infty} V(t)$ und $x_s := \lim\limits_{t\downarrow z} V(t)$. Wegen $V\colon]z,\infty[\to \mathbb{R}^+$ gilt $V^{-1}\colon]x_s, x_t[\to]z,\infty[$ und Bemerkung 3.4.2 liefert gerade $x_t > 0$ sowie $\lim\limits_{y\uparrow x_t} V^{-1}(y) = \infty$.
Zusätzlich gilt wegen der Positivität von V die Beziehung $x_s \geq 0$, sodass nur noch die Grenzwertrelation (3.1) zu zeigen bleibt.
Sei $\varepsilon > 0$ fest. Mit Lemma 2.2.3(c) erhalten wir

$$V\big(V^{-1}(q) \cdot (1-\varepsilon)\big) < q \leq V\big(V^{-1}(q) \cdot (1+\varepsilon)\big)$$

und damit

$$\frac{V\big(V^{-1}(q)\cdot(1-\varepsilon)\big) - V\big(V^{-1}(q)\big)}{a\big(V^{-1}(q)\big)} < \frac{q - V\big(V^{-1}(q)\big)}{a\big(V^{-1}(q)\big)} \leq \frac{V\big(V^{-1}(q)\cdot(1+\varepsilon)\big) - V\big(V^{-1}(q)\big)}{a\big(V^{-1}(q)\big)}.$$

Nach einer Grenzwertbildung über die vorausgehende Ungleichung und Beachtung, dass $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt wie im Beweis von Lemma 3.4.1

$$\log 1 \leq \lim_{q\uparrow x_t} \frac{q - V\big(V^{-1}(q)\big)}{a\big(V^{-1}(q)\big)} \leq \log 1$$

und somit $\lim\limits_{q\uparrow x_t} \frac{q - V(V^{-1}(q))}{a(V^{-1}(q))} = 0$.
Mittels dieser Tatsache können wir für $x > 0$

$$\begin{aligned}
\log x &= \lim_{q\uparrow x_t} \frac{V\big(x\cdot V^{-1}(q)\big) - V\big(V^{-1}(q)\big)}{a\big(V^{-1}(q)\big)} \\
&= \lim_{q\uparrow x_t} \left\{ \frac{V\big(x\cdot V^{-1}(q)\big) - q}{a\big(V^{-1}(q)\big)} + \frac{q - V\big(V^{-1}(q)\big)}{a\big(V^{-1}(q)\big)} \right\} \\
&= \lim_{q\uparrow x_t} \frac{V\big(x\cdot V^{-1}(q)\big) - q}{a\big(V^{-1}(q)\big)} + 0
\end{aligned}$$

schließen und unter Beachtung der Tatsache, dass für festes q das Argument des Grenzwertoperators isoton in x ist, generiert das Inversiontheorem

$$\lim_{q\uparrow x_t} \frac{V^{-1}\Big(q + y\cdot a\big(V^{-1}(q)\big)\Big)}{V^{-1}(q)} = e^y$$

für $y \in \mathbb{R}$. Somit ist V^{-1} in der Tat Gamma-variierend.

(b) Die Abbildung $U\colon]x_1, x_2[\to \mathbb{R}$ sei Gamma-variierend, weswegen $U^{-1}\colon]z, \infty[\to]x_1, x_2[$ gilt, wobei wir $z := U(x_1+)$ setzen und mittels der Definition der Gamma-Variation $U(x_2-) = \infty$ erhalten. Die Forderung an die Endpunkte in der Definition der Gamma-Variation impliziert, dass U^{-1} eine positive Funktion ist.[4]
Nach Voraussetzung gilt für eine gewisse positive Funktion f

$$\lim_{t \uparrow x_2} \frac{U\big(t + x \cdot f(t)\big)}{U(t)} = e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

und unter Kenntnisnahme, dass für feste t die Abbildung im Grenzwertoperator isoton in x ist, folgt mit dem Inversionstheorem für $y > 0$

$$\frac{U^{-1}\big(y \cdot U(s)\big) - s}{f(s)} \xrightarrow{s \uparrow x_2} \log y.$$

Substituieren wir s durch $U^{-1}(t)$, so hält $U^{-1}(t) \to x_2$ genau dann, wenn $t \to \infty$. Damit erhalten wir

$$\lim_{t \to \infty} \frac{U^{-1}\Big(y \cdot U\big(U^{-1}(t)\big)\Big) - U^{-1}(t)}{f\big(U^{-1}(t)\big)} = \log y. \tag{3.5}$$

Vorausgegangene Konvergenz ist nach Satz 2.1.4 lokal gleichmäßig, weil die linke Funktionenfolge für feste t isoton in y ist, da U^{-1} es gemäß Lemma 2.2.3(b) ist. Nach Lemma 2.1.3 ist die Konvergenz in (3.5) auch stetig. Durch Lemma 3.4.1 erkennen wir $\lim_{t \to \infty} \frac{U\left(U^{-1}(t)\right)}{t} = 1$, sodass $y_t := y \cdot \frac{t}{U(U^{-1}(t))} \xrightarrow{t \to \infty} y$ folgt. Somit schließen wir mithilfe der stetigen Konvergenz

$$\lim_{t \to \infty} \frac{U^{-1}(y \cdot t) - U^{-1}(t)}{f\big(U^{-1}(t)\big)} = \lim_{t \to \infty} \frac{U^{-1}\Big(y_t \cdot U\big(U^{-1}(t)\big)\Big) - U^{-1}(t)}{f\big(U^{-1}(t)\big)} = \log y,$$

was den Beweis komplettiert. □

4 Der Gumbel Max-Anziehungsbereich

4.1 Ausgewählte Charakterisierungen des Gumbel Max-Anziehungsbereiches

Wir beginnen damit eine Hilfsfunktion zu definieren, die zukünftige Formulierungen simplifiziert. Es sei F eine Verteilungsfunktion mit Endpunkten x_l und x_r, die wohlgemerkt weder endlich noch nichtnegativ sein müssen. Davon ausgehend definieren wir die isotone Abbildung $U\colon]x_l, x_r[\to]1, \infty[,\ x \mapsto \frac{1}{1-F(x)}$ und merken an, dass die Funktion $\frac{1}{-\log F(x)}$ gleichermaßen geeignet wäre, die in diesem Kapitel folgenden Re-

[4] An dieser Stelle kommt der Unterschied der Definition aus [Resnick, S. 26] und der von uns gegebenen Definition der Gamma-Variation zum Tragen. So garantiert die von uns geforderte Nichtnegativität des linken Endpunktes, dass die Inverse eine Abbildung mit nichtnegativen Werten ist. In [Resnick, S. 26] wird keine Bedingung an die Endpunkte gestellt, sodass auch Abbildungen mit sowohl negativem linken als auch negativem rechten Endpunkt zulässig wären. Deren Inverse nimmt dann jedoch negative Werte an, womit sie a priori nicht Pi-variierend sein kann. Somit ließe sich Satz 3.4.3 nicht in dieser Weise formulieren und insofern ist die Aussage in [Resnick, S. 27] nicht haltbar. Wir merken jedoch an, dass eine geeignete Modifikation der Begriffe der generalisierten Inversen und der Gamma-Variation, wie beispielsweise in dieser Arbeit geschehen, die Vorgehensweise in [Resnick] ermöglicht.

sultate zu erzielen.[5] Damit die Theorie der Gamma- und Pi-Variationen angewandt werden kann, müssen wir sicherstellen, dass die zu betrachtende Verteilungsfunktion F einen nichtnegativen linken Endpunkt besitzt. Um also jene Verteilungsfunktionen zu behandeln, geben wir eine Transformation an, die invariant unter der Eigenschaft ist, von einer Extremwertverteilung angezogen zu werden. Dazu unterscheiden wir in dem folgenden Lemma zwei Fälle.

Lemma 4.1.1.
Sei $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion mit Endpunkten x_l und x_r.

(a) *Ist der linke Endpunkt negativ und der rechte nichtpositiv, so liegt F genau dann im Max-Anziehungsbereich einer Extremwertverteilung G, wenn die Verteilungsfunktion $\tilde{F}\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto F(x + x_r - 1) \cdot \mathbb{1}(x \geq 0)$ ebenjenes tut.*

(b) *Falls der linke Endpunkt negativ und der rechte positiv ist, so wird F genau dann von der Extremwertverteilung G angezogen, wenn $\tilde{F}(x) := F(x) \cdot \mathbb{1}(x \geq 0)$ dies ebenso vermag.*

Wir bemerken, dass die transformierten Verteilungsfunktionen den linken Endpunkt 0 besitzen.

Beweis. (a) Im Falle der Hinrichtung existieren Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} > 0$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dergestalt, dass $F^n(a_n t + b_n) \xrightarrow{n\to\infty} G(t)$, für alle Stetigkeitspunkte t einer Extremwertverteilung G erfüllt ist. Mittels der Festlegung von $\tilde{a}_n := a_n$ und $\tilde{b}_n := b_n + 1 - x_r$ gilt nach Annahme

$$\tilde{F}^n(\tilde{a}_n t + \tilde{b}_n) = F^n(a_n t + b_n + 1 - x_r + x_r - 1) \xrightarrow{n\to\infty} G(t)$$

und demnach liegt $\tilde{F}$ im Max-Anziehungsbereich von G.

Für die Rückrichtung setzen wir $a_n := \tilde{a}_n$ und $b_n := \tilde{b}_n + x_r - 1$. Dabei sind $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} > 0$ und $(\tilde{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die nach Annahme existierenden Folgen, welche die Extrembeziehung für $\tilde{F}$ erfüllen. Nun verfahren wir analog zu der Hinrichtung.

(b) In Kapitel 1 wurde geklärt, dass nur das Verhalten nahe x_r maßgeblich ist, sodass die Transformation in (b) legitim ist. □

Fortan nehmen wir ohne Einschränkung an, die Verteilungsfunktion F habe einen nichtnegativen linken Endpunkt, da andernfalls eine geeignete Transformation gemäß Lemma 4.1.1 dies legitimierte.[6] Infolgedessen ist die in Kapitel 3 entwickelte Theorie anwendbar.

Folgender Satz ist das Hauptresultat dieser Arbeit, aus welchem wir wichtige weitere Charakterisierungen derivieren.

Satz 4.1.2.
Unter der obigen Notation sind äquivalent:

(a) *F liegt im Max-Anziehungsbereich der Gumbel Verteilung.*

(b) *U^{-1} ist Pi-variierend.*

[5] Aus dem Beweis von Satz 4.1.2 geht hervor, dass beide Abbildungen asymptotisch äquivalent in x_r sind, sodass alle Charakterisierungen in diesem Kapitel nach Lemma 3.2.6(a) auch mit der Abbildung $\frac{1}{-\log F}$ hätten formuliert werden können.

[6] Man vergleiche dafür mit Beispiel 4.2.3.

(c) *U ist Gamma-variierend.*

Beweis. In der Richtung von (a) nach (b) gelte für geeignete $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$

$$F^n(a_n t + b_n) \xrightarrow{n\to\infty} \exp(-e^{-t}),$$

woraus aus Stetigkeitsgründen $-n \cdot \log F(a_n t + b_n) \xrightarrow{n\to\infty} e^{-t}$ folgt. Unter Zuhilfenahme einer Regel von de l'Hospital erhalten wir $-\frac{\log z}{1-z} \xrightarrow{z\uparrow 1} 1$ und somit $n \cdot (1 - F(a_n t + b_n)) \xrightarrow{n\to\infty} e^{-t}$, welches nach Kehrwertbildung und Nutzung der U-Notation $n^{-1} \cdot U(a_n t + b_n) \xrightarrow{n\to\infty} e^{t}$ generiert. Das Inversionstheorem ist wegen der Isotonie des U und der Stetigkeit des Logarithmus' anwendbar und wir erhalten nach einer Inversion

$$\frac{U^{-1}(yn) - b_n}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \log y,\ y > 0.$$

Wegen $\log 1 = 0$ gilt nach der asymptotischen Nullsubtraktion von $\frac{U^{-1}(1\cdot n) - b_n}{a_n}$ bereits

$$\frac{U^{-1}(yn) - U^{-1}(n)}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \log y.$$

Ziel ist nun für reelle t die Differenz $U^{-1}(yt) - U^{-1}(t)$ für $t \to \infty$ durch natürliche Zahlen im Argument einzuschnüren, sodass Obiges anwendbar ist. Sei dafür $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Da y und ε positiv sind, erhalten wir für große t

$$\begin{array}{rcccl} yt \le y \cdot (\lfloor t \rfloor + 1) & \le & \lfloor t \rfloor y + \lfloor t \rfloor y \cdot \varepsilon & = & y(1+\varepsilon) \cdot \lfloor t \rfloor \text{ und} \\ t \le \quad \lfloor t \rfloor + 1 & \le & \lfloor t \rfloor + \lfloor t \rfloor \varepsilon & = & (1+\varepsilon) \cdot \lfloor t \rfloor . \end{array}$$

Unter Verwendung dieser Ungleichungen und der Isotonie von U^{-1} gilt mit (3.4) für große t einerseits

$$\begin{aligned} \frac{U^{-1}(yt) - U^{-1}(t)}{a_{\lfloor t \rfloor}} &= \frac{U^{-1}(yt) - U^{-1}(\lfloor t \rfloor)}{a_{\lfloor t \rfloor}} - \frac{U^{-1}(t) - U^{-1}(\lfloor t \rfloor)}{a_{\lfloor t \rfloor}} \\ &\ge \frac{U^{-1}(y\lfloor t \rfloor) - U^{-1}(\lfloor t \rfloor)}{a_{\lfloor t \rfloor}} - \frac{U^{-1}(t) - U^{-1}(\lfloor t \rfloor)}{a_{\lfloor t \rfloor}} \\ &\ge \frac{U^{-1}(y\lfloor t \rfloor) - U^{-1}(\lfloor t \rfloor)}{a_{\lfloor t \rfloor}} - \frac{U^{-1}\big(\lfloor t \rfloor \cdot (1+\varepsilon)\big) - U^{-1}(\lfloor t \rfloor)}{a_{\lfloor t \rfloor}} \\ &\xrightarrow{t\to\infty} \log y - \log(1+\varepsilon). \end{aligned}$$

und andererseits

$$\frac{U^{-1}(yt) - U^{-1}(t)}{a_{\lfloor t \rfloor}} \le \frac{U^{-1}\big(y \cdot (1+\varepsilon)\lfloor t \rfloor\big) - U^{-1}(\lfloor t \rfloor)}{a_{\lfloor t \rfloor}} \xrightarrow{t\to\infty} \log y + \log(1+\varepsilon).$$

Insgesamt gilt also, da $\varepsilon > 0$ beliebig war und der Logarithmus stetig ist,

$$\frac{U^{-1}(yt) - U^{-1}(t)}{a_{\lfloor t \rfloor}} \xrightarrow{t\to\infty} \log y.$$

Somit ist nach Satz 3.3.3 die Abbildung U^{-1} Pi-variierend mit $a(t) = a_{\lfloor t \rfloor}$.

Für die Richtung von (b) nach (c) nutzen wir Satz 3.4.3(a) und erhalten, dass $\left(U^{-1}\right)^{-1}$

Gamma-variierend ist. Nach Lemma 2.2.3(g) gilt $\left(U^{-1}\right)^{-1}(x) = U(x-)$, sodass nach Lemma 3.2.6(d) auch U Gamma-variierend ist.

In der letzten Implikation von (c) nach (a) gelte $\frac{U(t+x\cdot f(t))}{U(t)} \xrightarrow{t\uparrow x_r} e^x$ für $x \in \mathbb{R}$. Nach Lemma 3.4.1 gilt $\frac{U(U^{-1}(n))}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ und gemäß der Definition der Gamma-Variation auch $U^{-1}(n) \xrightarrow{n\to\infty} x_r > 0$, sodass wir nach einer Substitution $t := U^{-1}(n)$ sehen

$$\frac{U\big(U^{-1}(n) + x \cdot f\left(U^{-1}(n)\right)\big)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} e^x,$$

was nach Auswertung von U und einer Kehrwertbildung gleichbedeutend zu

$$n \cdot \left\{1 - F\left(U^{-1}(n) + x \cdot f\left(U^{-1}(n)\right)\right)\right\} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-x}$$

ist. Erneut nutzen wir $1 - z \overset{z\uparrow 1}{\sim} -\log z$ aus und erhalten

$$n \cdot \log F\left(U^{-1}(n) + x \cdot f\left(U^{-1}(n)\right)\right) \xrightarrow{n\to\infty} -e^{-x}.$$

Schließlich folgt

$$F^n\left(f\left(U^{-1}(n)\right) \cdot x + U^{-1}(n)\right) \xrightarrow{n\to\infty} \exp\left(-e^{-x}\right).$$

Mit der Wahl von $a_n := f\left(U^{-1}(n)\right) > 0$ und $b_n := U^{-1}(n)$ gilt somit (c). Im Falle, dass kleine n noch nicht im Definitionsbereich von U^{-1} liegen, ersetzen wir endlich viele Anfangsglieder der a_n und b_n zwecks Wohldefiniertheit durch die Zahl eins. □

Eine direkte Anwendung des Satzes generiert eine weitere Charakterisierung, die etwa aus [Bücher(b), Satz 5.7], [Kabluchko, Satz 5.3.1], [Löwe, Satz 1.3.5] oder [De Haan und Ferreira, Thm 1.2.1] bekannt ist. Diese ist auf [Gnedenko] zurückzuführen.

Korollar 4.1.3.
Die Verteilungsfunktion F liegt genau dann im Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung, wenn eine positive, messbare Funktion f der Form existiert, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{t\uparrow x_r} \frac{1 - F\big(t + x \cdot f(t)\big)}{1 - F(t)} = e^{-x}.$$

Beweis. Von der Gumbel-Verteilung angezogen zu werden ist nach Satz 4.1.2(c) gleichbedeutend dazu, dass U Gamma-variierend ist. Eine Auswertung in U liefert

$$\lim_{t\uparrow x_r} \frac{1 - F(t)}{1 - F\big(t + x \cdot f(t)\big)} = e^x.$$

Die Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ validiert die Aussage. □

Das vorangegangene Kriterium erfordert jedoch, eine Funktion f zu finden, was sich in der Praxis als diffizil herausstellen kann. Wir geben nun ein selbstständig erarbeitetes Testkriterium, das den Gumbel Max-Anziehungsbereich charakterisiert und keine Kandidatenfindung erfordert.

Satz 4.1.4.
Die Verteilungsfunktion F liegt genau dann im Gumbel Max-Anziehungsbereich, wenn für alle $y > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U^{-1}(ty) - U^{-1}(t)}{U^{-1}(te) - U^{-1}(t)} = \log y \tag{4.1}$$

erfüllt ist. In diesem Fall sind $a_n := U^{-1}(ne) - U^{-1}(n)$ und $b_n := U^{-1}(n)$ mögliche Wahlen, sodass

$$F^n(a_n \cdot x + b_n) \xrightarrow{n\to\infty} \Lambda(x),\ x \in \mathbb{R} \quad \text{und somit} \quad \frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} \Lambda$$

gelten. Insbesondere ist der Nenner in (4.1) *für große t positiv.*

Beweis. Nach Satz 4.1.2(b) ist im Gumbel-Max Anziehungsbereich zu liegen äquivalent zu der Pi-Variation der Abbildung U^{-1}, wobei die Funktion $b(t)$ nach Satz 3.3.3 als $U^{-1}(t)$ wählbar ist. Im Beweis von Satz 3.3.2(c) sahen wir, dass die Wahl $a(t) = U^{-1}(t \cdot e) - U^{-1}(t)$ für große t möglich ist. Die Äquivalenz ergibt sich nun aus der Eindeutigkeit der Funktion $a(t)$ bezüglich asymptotischer Äquivalenz, welche Satz 3.3.2(a) garantiert. Insbesondere muss für große t der Nenner größer als Null sein, da sonst die asymptotische Äquivalenz zu einer positiven Funktion verletzt wäre.

Wir weisen nun die Möglichkeit der Wahlen von a_n, b_n nach. Nach Satz 4.1.2(b) wissen wir, dass U^{-1} Pi-variierend ist. Daher gilt mit $a(t) := U^{-1}(te) - U^{-1}(n)$ die Beziehung (3.4), also

$$\frac{U^{-1}(ty) - U^{-1}(t)}{a(t)} \xrightarrow{t\to\infty} \log y,\ y > 0.$$

Wir nutzen das Inversionstheorem und erhalten

$$\frac{\left(U^{-1}\right)^{-1}\Big(a(t)x + U^{-1}(t)\Big)}{t} \xrightarrow{t\to\infty} e^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Der Beweis von Lemma 3.2.6(d) führt in Verbindung mit Lemma 2.2.3(g) zu der asymptotischen Äquivalenz von $\left(U^{-1}\right)^{-1}$ und U, sodass

$$\frac{U\Big(a(t)x + U^{-1}(t)\Big)}{t} = \frac{t^{-1}}{1 - F\Big(a(t)x + U^{-1}(t)\Big)} \xrightarrow{t\to\infty} e^x.$$

Analog zu dem Beweis von Satz 4.1.2 erhalten wir mittels Kehrwertbildung, Multiplikation mit -1 und Nutzung von $-\log z \overset{z\uparrow 1}{\sim} 1 - z$

$$F^t\Big(a(t) \cdot x + U^{-1}(t)\Big) \xrightarrow{t\to\infty} \Lambda(x).$$

Setzen wir $t_n := n$, ist der Satz verifiziert. □

In Anwendungsfällen diskreter Verteilungen kann es sich als kompliziert erweisen zu verifizieren, dass jene Verteilung gerade nicht von der Gumbel-Verteilung angezogen wird, da der Inversionsprozess aus Satz 4.1.4 bisweilen lediglich eine implizit beschriebene Abbildung generiert. Folgendes Lemma mag in solchen Situationen hilfreich sein. Wir folgen nicht dem Beweis in [Resnick, Cor. 1.6], sondern beweisen es selbstständig mithilfe der in dieser Arbeit entwickelten Theorie.

Lemma 4.1.5.
Wird eine Verteilungsfunktion F von der Gumbel-Verteilung angezogen, so gilt

$$\lim_{y \uparrow x} \frac{1 - F(y)}{1 - F(x)} \xrightarrow{x \uparrow x_r} 1.$$

Beweis. Wir wissen nach Satz 4.1.2(c), dass $U = \frac{1}{1-F}$ Gamma-variierend ist. Dem Beweis von Lemma 3.2.6(d) entnehmen wir, dass dann bereits $\frac{1}{1-F(x)}$ und $U(x-) = \lim_{y \uparrow x} \frac{1}{1-F(x)}$ in x_r asymptotisch äquivalent sind, woraus die Aussage folgt. □

4.2 Anwendungen der entwickelten Theorie

Im letzten Subkapitel geben wir Beispiele jener Verteilungen, die in dem Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung liegen und auch jener, die das nicht tun.
Wir erinnern daran, dass die Normalverteilung von der Gumbel-Verteilung angezogen wird, man vergleiche mit [Bücher(a), Satz 5.10]. Unter Zuhilfenahme dieser Tatsache lässt sich folgende Grenzwertbeziehung begründen.

Beispiel 4.2.1.
Es bezeichne Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Für alle $y > 0$ gilt:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{1}{ty}\right) - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{1}{t}\right)}{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{1}{te}\right) - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{1}{t}\right)} = \log y.$$

Beweis. Die Standardnormalverteilung wird von der Gumbel-Verteilung angezogen. Eine Berechnung der generalisierten Inversen der Abbildung $U(t) = \frac{1}{1-\Phi(t)}$ ergibt $U^{-1}(y) = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{1}{y}\right)$, da Φ strikt isoton und stetig ist. Die Behauptung folgt anschließend aus Satz 4.1.4. □

Beispiel 4.2.2.
Sei F die Verteilungsfunktion einer Exponential(λ)-Verteilung für ein $\lambda > 0$. Dann wird F von der Gumbel-Verteilung angezogen und zusätzlich gilt

$$F^n\left(\frac{x + \log n}{\lambda}\right) \xrightarrow{n \to \infty} \Lambda(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Für $x > 0$ gilt $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ und daher $U^{-1}(y) = \frac{\log y}{\lambda}$. Einsetzen liefert

$$\frac{\frac{\log(t \cdot y)}{\lambda} - \frac{\log t}{\lambda}}{\frac{\log(t \cdot e)}{\lambda} - \frac{\log t}{\lambda}} = \log y$$

und somit haben wir (4.1) gezeigt, weswegen F nach Satz 4.1.4 von der Gumbel-Verteilung angezogen wird. Der Zusatz ergibt sich aus dem zweiten Teil des Satzes 4.1.4, da $a_n = U^{-1}(ne) - U^{-1}(n) = \lambda^{-1}$, $b_n = U^{-1}(n) = \frac{\log n}{\lambda}$ und somit $a_n x + b_n = \lambda^{-1} \cdot (x + \log n)$ gilt. □

Wir bemerken, dass die Exponential(λ)-Verteilung die Relation (4.1) sogar im Endlichen erfüllt.

Auch Verteilungen mit einem endlichen rechten Endpunkt liegen im Gumbel Max-Anziehungsbereich. Man vergleiche mit [Kabluchko, Aufg. 5.3.7].

Beispiel 4.2.3.
Die Verteilungsfunktion $F(x) = (1 - e^{\frac{\lambda}{x}}) \cdot \mathbb{1}(x < 0) + \mathbb{1}(x \geq 0)$ liegt für festes $\lambda > 0$ im Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung und insbesondere gilt

$$F^n\left(\lambda \cdot \left(\frac{x-1}{\log n} - \frac{x}{1+\log n}\right)\right) \xrightarrow{n\to\infty} \Lambda(x)$$

für beliebige $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Hier ist der rechte Endpunkt $x_r = 0$ und somit nichtpositiv. Wir transformieren gemäß Lemma 4.1.1 auf $\tilde{F}(x) := F(x-1) \cdot \mathbb{1}(x \geq 0)$ und stellen für $0 < x < 1$

$$U(x) = \frac{1}{1 - F(x-1)} = e^{-\frac{\lambda}{x-1}}$$

fest. Daher erhalten wir

$$U^{-1}(y) = -\frac{\lambda}{\log y} + 1,$$

wobei $U^{-1}\colon \left]e^{\lambda}, \infty\right[\to \left]0, 1\right[$. Einsetzen in (4.1) ergibt

$$\frac{U^{-1}(yt) - U^{-1}(t)}{U^{-1}(et) - U^{-1}(t)} = \frac{-\frac{1}{\log(yt)} + \frac{1}{\log(t)}}{-\frac{1}{\log(et)} + \frac{1}{\log(t)}} = \frac{\frac{\log y}{\log t \cdot \log(yt)}}{\frac{1}{\log t \cdot \log(et)}} \xrightarrow{t\to\infty} \log y$$

und die erste Behauptung folgt nun aus Satz 4.1.4 in Verbindung mit Lemma 4.1.1. Es ergeben sich für $\tilde{F}$ die Folgen

$$\tilde{a}_n = U^{-1}(ne) - U^{-1}(n) = -\frac{\lambda}{1+\log n} + \frac{\lambda}{\log n}, \quad \tilde{b}_n = U^{-1}(n) = -\frac{\lambda}{\log n} + 1$$

und somit erhalten wir nach anschließender Rücktransformation gemäß Lemma 4.1.1:

$$a_n x + b_n = \left(-\frac{\lambda}{1+\log n} + \frac{\lambda}{\log n}\right) \cdot x - \frac{\lambda}{\log n} = \lambda \cdot \left(\frac{x-1}{\log n} - \frac{x}{1+\log n}\right).$$

□

Im Folgenden verallgemeinern wir die Vorgehensweise aus [Resnick, S. 39]. Dabei transformieren wir eine dem Gumbel Max-Anziehungsbereich zugehörige Verteilung in eine, die jenes ebenso vermag. Dazu erarbeiten wir zunächst selbstständig ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Lemma.

Lemma 4.2.4.
Es seien $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ D-wertige Zufallsvariablen und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ eine deterministische Folge derart, dass $Y_n - b_n \xrightarrow{d} Y$. Zusätzlich sei $g\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit antitoner Ableitung $g' > 0$ und $\frac{g'(Y_n)}{g'(b_n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$, wobei D offen in $\mathbb{R}$ sei. Dann gilt

$$\frac{g(Y_n) - g(b_n)}{g'(b_n)} \xrightarrow{d} Y.$$

Beweis. Für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega$ existiert wegen der Differenziarbarkeit von g eine

Zwischenstelle $\xi_{n,\omega}$ in der Form, dass

$$g(Y_n(w)) - g(b_n) = g'(\xi_{n,\omega}) \cdot (Y_n(\omega) - b_n),$$

wobei $\xi_{n,\omega} \in [Y_n(\omega), b_n] \cup [b_n, Y_n(\omega)]$. Nun definieren wir für festes n die Abbildung $\xi_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \xi_{n,\omega}$ und bemerken, dass diese Zwischenstellenabbildung bekanntlich messbar ist. Nach obig Erkanntem gilt somit

$$g(Y_n) - g(b_n) = g'(\xi_n) \cdot (Y_n - b_n).$$

Zeigen wir $\frac{g'(\xi_n)}{g'(b_n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$, so folgt mit dem Lemma von Slutsky und der Voraussetzung

$$\frac{g(Y_n) - g(b_n)}{g'(b_n)} = \frac{g'(\xi_n)}{g'(b_n)} \cdot (Y_n - b_n) \xrightarrow{d} 1 \cdot Y.$$

Dazu setzen wir $q_n := \frac{g'(\xi_n)}{g'(b_n)}$ und wählen $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest.

$$\mathbb{P}(|q_n - 1| > \varepsilon) = \mathbb{P}(q_n - 1 > \varepsilon,\, q_n \geq 1) + \mathbb{P}(1 - q_n > \varepsilon,\, q_n < 1) =: R_{1,n} + R_{2,n}.$$

Wir beweisen $R_{1,n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und der Beweis für $R_{2,n}$ nutzt dieselben Argumente und Herangehensweise. Eine Unterscheidung danach, ob $Y_n \leq \xi_n \leq b_n$ oder $b_n \leq \xi_n \leq Y_n$ ist, liefert mithilfe der Antitonie von g' und der vorausgesetzen stochastischen Konvergenz

$$\begin{aligned}
R_{1,n} &= \mathbb{P}(q_n - 1 > \varepsilon,\, q_n \geq 1,\, Y_n \geq b_n) + \mathbb{P}(q_n - 1 > \varepsilon,\, q_n \geq 1,\, Y_n < b_n) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{g'(\xi_n)}{g'(b_n)} - 1 > \varepsilon,\, q_n \geq 1,\, Y_n \geq b_n\right) + \mathbb{P}\left(\frac{g'(\xi_n)}{g'(b_n)} - 1 > \varepsilon,\, q_n \geq 1,\, Y_n < b_n\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\frac{g'(b_n)}{g'(b_n)} - 1 > \varepsilon,\, q_n \geq 1,\, Y_n \geq b_n\right) + \mathbb{P}\left(\frac{g'(Y_n)}{g'(b_n)} - 1 > \varepsilon,\, q_n \geq 1,\, Y_n < b_n\right) \\
&\leq \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}\left(\left|\frac{g'(Y_n)}{g'(b_n)} - 1\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

welches das Lemma validiert. □

Wir wenden nun Lemma 4.2.4 auf die Exponential(1)-Verteilung mit der Transformation $\log x$ an. Es sei erwähnt, dass eine Vielzahl möglicher Transformationen g existiert. In [Resnick, S. 39] wird beispielsweise $g(x) = \frac{x}{1+x}$ genutzt.

Beispiel 4.2.5.
Die durch die Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - \exp(-e^x)$ bestimmte Verteilung liegt im Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung, wobei $a_n = \log^{-1} n$ und $b_n = \log\log n$, für $n > 1$, mögliche stabilisierende Folgen sind.

Beweis. Y_n bezeichne das Maximum n unabhängiger und identisch Exponential(1)-verteilter Zufallsvariablen, welche also nur positive Werte annehmen. Nach Beispiel 4.2.2 gilt $Y_n - b_n \xrightarrow{d} \Lambda$, wobei $b_n = \log n$. Wir setzen $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log x$ und erhalten

$$\mathbb{P}\big(g(Y_n) \leq x\big) = \mathbb{P}(Y_n \leq e^x) = \big(1 - \exp(-e^x)\big)^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

Bezeichnet nun M_n das Maximum n unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F, so folgt $g(Y_n) \overset{d}{=} M_n$.
Es gilt $g'(x) = x^{-1} > 0$ und g' ist antiton. Für $n > 1$ erhalten wir wegen der

Verteilungskonvergenz von $Y_n - \log n$ und dem Lemma von Slutsky

$$\frac{Y_n}{\log n} = (Y_n - \log n) \cdot \log^{-1} n + 1 \xrightarrow{d} 1.$$

Also folgt insbesondere nach dem Anwenden von Rechenregeln der stochastischen Konvergenz $\frac{\log n}{Y_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$. Schließlich generiert Lemma 4.2.4

$$\frac{M_n - \log\log n}{\log^{-1} n} \stackrel{d}{=} \frac{g(Y_n) - g(b_n)}{g'(b_n)} \xrightarrow{d} \Lambda.$$

□

Bemerkung 4.2.6.
Wir merken an, dass man Beispiel 4.2.5 alternativ mithilfe von Satz 4.1.4 hätte behandeln können. Wählt man diesen Weg, so erhält man für große n die stabilisierenden Folgen $a_n = \log \frac{1+\log n}{\log n}$ und $b_n = \log\log n$, sodass insbesondere $\log \frac{1+\log n}{\log n}$ und $\log^{-1} n$ asymptotisch äquivalent sind.

Transformieren wir die Exponential(1)-Verteilung mittels einer geeigneten Funktion, so verlassen wir den Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung und betreten den der Weibull-Verteilung.

Beispiel 4.2.7.
Es sei E eine Exponential(1)-verteilte Zufallsvariable und $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$. Dann wird die transformierte Zufallsvariable $g(E)$ von der Weibull-Verteilung angezogen.

Beweis. Zunächst gilt für $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$

$$\frac{e^E}{1+e^E} \leq x \text{ genau dann, wenn } E \leq \log \frac{x}{1-x},$$

sodass wir für die Verteilungsfunktion F der Zufallsvariablen $g(E)$

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\log \frac{x}{1-x}\right) = 1 - \frac{1-x}{x} \tag{4.2}$$

erhalten. Der rechte Endpunkt der Verteilung ist 1. Nach [Bücher(b), Satz 5.5] bleibt also lediglich zu zeigen, dass für ein $\alpha > 0$

$$\frac{1 - F(1-\lambda x)}{1 - F(1-x)} \xrightarrow{x \downarrow 0} \lambda^\alpha, \ \lambda > 0 \tag{4.3}$$

gilt. Dazu bestimmen wir mit (4.2) die Tailfunktion $1 - F(x) = \frac{1-x}{x}$ und schreiben

$$\frac{1 - F(1-\lambda x)}{1 - F(1-x)} = \frac{\lambda x}{x} \cdot \frac{1-x}{1-\lambda x} \xrightarrow{x \downarrow 0} \lambda.$$

Folglich ist (4.3) mit $\alpha = 1$ erfüllt und die Behauptung gezeigt. □

Bemerkung 4.2.8.
Das Beispiel 4.2.7 lässt sich weiter analyisieren und sich ein Analogon angeben.

1. Die Transformation $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ kann gemäß Lemma 4.2.4 nicht alle dort postulierten Voraussetzungen erfüllen.
   In der Tat gilt die stochastische Konvergenz von $\frac{g'(Y_n)}{g'(\log n)}$ gegen 1 nicht, wenn Y_n das Maximum n Eponential(1)-verteilter Zufallsvariablen bezeichnet. Denn mit $g'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$, der Verteilungskonvergenz von $Y_n - \log n$ gegen die Gumbel-Verteilung und dem Satz von der stetigen Abbildung erhalten wir
   $$\frac{g'(Y_n)}{g'(\log n)} = \frac{e^{Y_n}}{(1+e^{Y_n})^2} \cdot \frac{(1+e^{\log n})^2}{e^{\log n}} = e^{Y_n - \log n} \cdot \left(\frac{\frac{1}{n} + e^{Y_n - \log n}}{\frac{1}{n} + 1} \right)^{-2} \xrightarrow{d} e^{-\Lambda},$$
   wobei wir in dem letzten Schritt auch das Lemma von Slutsky genutzt haben.
2. In analoger Vorgehensweise lässt sich mittels der Transformationsabbildung $g(x) = \exp(x)$ aus der Exponential(1)-Verteilung die Pareto(1)-Verteilung gewinnen, welche bekanntlich in dem Max-Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung liegt. Für Letzteres sichte man etwa [Bücher(b), Bsp. 1.9].

Schlussendlich geben wir exemplarisch weitere Verteilungen an, die nicht im Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung liegen und beweisen dies eigenständig unter Nutzung der in dieser Arbeit entwickelten Theorie. Für (4) siehe auch [De Haan und Ferreira, Exc. 1.18].

Beispiel 4.2.9.
Folgende Verteilungen werden nicht von der Gumbel-Verteilung angezogen:

(1) die geometrische Verteilung mit Parameter $p \in]0,1[$.

(2) die Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda > 0$.

(3) die Verteilung mit Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - \frac{1}{\log x}$, $x > e$.

(4) die Verteilung mit Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - e^{-(x+\sin x)}$, $x > 0$.

Beweis. (1) Wir nutzen Satz 4.1.4 und zeigen, dass (4.1) nicht erfüllt ist. Es gilt

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} p(1-p)^k = 1 - (1-p)^{\lfloor x \rfloor + 1}, \; x \in \mathbb{R}$$

und somit $U(x) = (1-p)^{-(\lfloor x \rfloor + 1)}$. Mithin erhalten wir nach einer Inversion

$$U^{-1}(y) = \left\lceil \frac{\log y}{\log\left((1-p)^{-1}\right)} - 1 \right\rceil, \text{ für } y > (1-p)^{-1}.$$

Mit $t_n := \left(\frac{1}{1-p}\right)^{3/2+n}$ und $y = \left(\frac{1}{1-p}\right)^{1/4} \neq 1$, wobei $n \in \mathbb{N}$, folgt

$$\begin{aligned} U^{-1}(t_n y) - U^{-1}(t_n) &= \left\lceil \frac{\log(t_n y)}{\log\left((1-p)^{-1}\right)} - 1 \right\rceil - \left\lceil \frac{\log(t_n)}{\log\left((1-p)^{-1}\right)} - 1 \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{7}{4} + n - 1 \right\rceil - \left\lceil \frac{3}{2} + n - 1 \right\rceil = 0. \end{aligned}$$

Wegen $y > 1$, kann somit (4.1) nicht gelten.

(2) Wir nutzen Lemma 4.1.5 und zeigen $\lim\limits_{x\uparrow n} \frac{1-F(n)}{1-F(x)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \neq 1$, für $n \in \mathbb{N}$, woraus die Aussage folgt.

$$\begin{aligned}
\frac{1-F(n)}{1-F(n-)} &= \frac{1-e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}}{1-e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}} = \frac{e^{\lambda}-\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}}{e^{\lambda}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}}\\
&= 1-\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^{k-n}}{k!/n!}\right)^{-1} = 1-\left(1+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-n}}{(n+1)\cdot\ldots\cdot k}\right)^{-1}\\
&= 1-\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k)}\right)^{-1}\\
&= 1-\left(1+\frac{1}{n+1}\left(\lambda+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)}\right)\right)^{-1}\\
&\xrightarrow{n\to\infty} 1-(1+0)^{-1} = 0 \neq 1,
\end{aligned}$$

da die Reihe durch 0 nach unten und e^{λ} nach oben abgeschätzt werden kann, womit die Behauptung verifiziert ist.

(3) Es gilt $U(x) = \log x$, $x > e$ und somit $U^{-1}(y) = e^y$. Setzen wir nun $y = e+1$ in (4.1) ein, so erhalten wir

$$\frac{e^{t(e+1)}-e^t}{e^{te}-e^t} = \frac{e^t - e^{t(1-e)}}{1-e^{t(1-e)}} \xrightarrow{t\to\infty} \infty \neq \log(e+1),$$

womit die Aussage wieder aus Satz 4.1.4 folgt.

(4) Zunächst ist $x + \sin x$ injektiv, denn angenommen es gälte für $x_1 < x_2$, dass $x_1 + \sin x_1 = x_2 + \sin x_2$, so würde unter Ausnutzung einer trigonometrischen Identität und $|\sin x| < |x|$ für $x \neq 0$

$$x_1 - x_2 = \sin x_2 - \sin x_1 = 2\cos\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)$$

folgen und somit insbesondere $|x_1 - x_2| \leq 2|\sin\frac{x_2-x_1}{2}|$ gelten. Dem folgend ergäbe

$$\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right| \leq \left|\sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\right| < \left|\frac{x_2-x_1}{2}\right|$$

die Kontradiktion.
Damit ist auch $1 - e^{-(x+\sin x)}$ für $x > 0$ injektiv und auf seinem Bild invertierbar. Diesmal werden wir Satz 4.1.4 als Hilfsmittel in einem Widerspruchsbeweis nutzen. Es gilt $U(x) = \frac{1}{1-F(x)} = e^{x+\sin x}$ für positive x. Wir setzen $t_n := e^{2\pi n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und beachten

$$t_n \cdot (1-F(x+\log t_n))) = e^{2\pi n}\cdot e^{-(x+2\pi n+\sin(x+2\pi n))} = e^{-(x+\sin x)} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-(x+\sin x)}$$

für $x > 0$, was

$$t_n^{-1}\cdot\frac{1}{1-F(x+\log t_n))} \xrightarrow{n\to\infty} e^{x+\sin x}$$

impliziert. Dies wiederum ist gleichbedeutend zu

$$\frac{U(x + \log t_n)}{t_n} \xrightarrow{n\to\infty} U(x),$$

weswegen das Inversionstheorem

$$U^{-1}(yt_n) - \log t_n \xrightarrow{n\to\infty} U^{-1}(y)$$

für $y > 1$ generiert. Weiterhin gilt wegen der Injektivität und

$$t_n = e^{2\pi n} = e^{2\pi n + \sin 2\pi n} = U(2\pi n)$$

bereits $U^{-1}(t_n) = U^{-1}(e^{2\pi n}) = 2\pi n = \log t_n$, sodass vorangegangene Konvergenz sich zu $U^{-1}(yt_n) - U^{-1}(t_n) \xrightarrow{n\to\infty} U^{-1}(y)$ umschreiben lässt. Eine Konsequenz davon ist

$$\frac{U^{-1}(yt_n) - U^{-1}(t_n)}{U^{-1}(et_n) - U^{-1}(t_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{U^{-1}(y)}{U^{-1}(e)}, \ y > 1.$$

Läge nun F im Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung, so müsste (4.1) und somit

$$\frac{U^{-1}(y)}{U^{-1}(e)} = \log y$$

für $y > 1$ gelten. Nehmen wir nun an, dass dies gälte, so erhielten wir wegen

$$U^{-1}(e^{2\pi}) = 2\pi = \log e^{2\pi} = \frac{U^{-1}(e^{2\pi})}{U^{-1}(e)}$$

die Beziehung $U^{-1}(e) = 1$, was $U^{-1}(y) = \log y$, für $y > 1$, nach sich zöge. Folglich erhielten wir

$$\log U\left(\frac{\pi}{6}\right) = \log \exp\left(\frac{\pi}{6} + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2},$$

was wegen $U^{-1}(U(\pi/6)) = \pi/6$ kontradiktär wäre. Somit gilt (4.1) gerade nicht, sodass F nicht von der Gumbel-Verteilung angezogen wird. □

Bemerkung.
Das Beispiel 4.2.9 generiert weitere Erkenntnisse.

1. Tatsächlich liegen alle Verteilungen aus Beispiel 4.2.6 in keinem der drei Max-Anziehungsbereiche. Alle Verteilungen haben einen unendlichen rechten Endpunkt, weswegen sie nach [Bücher(b), Satz 5.5] nicht im Weibull Max-Anziehungsbereich liegen. Weiterhin ist keine der vier Tailfunktionen regulär variierend mit negativem Index, sodass sie gemäß [Bücher(b), Satz 5.1] auch nicht von der Fréchet-Verteilung angezogen werden können.

2. Wir bemerken die Tatsache, dass für ein $p \in]0, 1[$ und eine Exponential($-\log(1-p)$)-verteilte Zufallsvariable E die Verteilung von $\lfloor E \rfloor$, genannt **Diskretisierung von** E, gerade die geometrische Verteilung mit Parameter p ist, was man nach einem Hinschreiben der Zähldichte instantan einsieht. Mithilfe dieser Erkenntnis lässt sich aus Beispiel 4.2.9(1) und Beispiel 4.2.2 deduzieren, dass Diskretisierungen von Zufallsvariablen, die von der Gumbel-Verteilung angezogen werden, im Allgemeinen nicht in dem Gumbel Max-Anziehungsbereich liegen müssen.

Fazit

In dieser Arbeit haben wir mit dem Satz 4.1.4 ein Kriterium erarbeitet, das ohne Kandidatenfindung ermöglicht, komfortabel zu überprüfen, ob eine Verteilungsfunktion von der Gumbel-Verteilung angezogen wird. Insbesondere erlaubt das Kriterium es, auf verhältnismäßig simple Art und Weise zu verifizieren, dass eine Verteilung nicht in dem Gumbel Max-Anziehungsbereich liegt. Somit hebt es sich von dem Kriterium aus Korollar 4.1.3 ab. Bisweilen gestaltet sich dabei der Prozess des Invertierens als aufwändig, sodass in Fällen komplizierter diskreter Verteilungen numerische Methodiken indiziert wären.
Um diese Resultate zu erzielen, führten wir die Gamma- und Pi-Variation ein, welche wir in einer in sich abgeschlossenen Theorie präsentierten, wobei Interdependenzen zu der regulären Variation aufgezeigt wurden.

Literatur

[Amann und Escher] Herbert Amann und Joachim Escher. *Analysis*. Bd. 3. Birkhäuser, 2005.

[Billingsley] Patrick Billingsley. *Probability and Measure*. Bd. Anniversary Edition. John Wiley & Sons, 2012.

[Bingham et al.] Nicholas H Bingham, Charles M Goldie und Jef L Teugels. *Regular variation*. Bd. 1. Cambridge university press, 1989.

[Bücher(a)] Axel Bücher. *Wahrscheinlichkeitstheorie. Skriptum zur Vorlesung an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf.* 2019.

[Bücher(b)] Axel Bücher. *Extremwerttheorie. Manuskriptum zur Vorlesung an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf.* 2019.

[De Haan und Ferreira] Laurens De Haan und Ana Ferreira. *Extreme value theory: an introduction*. Springer Science & Business Media, 2007.

[Embrechts und Hofert] Paul Embrechts und Marius Hofert. "A note on generalized inverses". In: *Mathematical Methods of Operations Research* 77.3 (2013), S. 423–432.

[Fisher und Tippet] Ronald Aylmer Fisher und Leonard Henry Caleb Tippett. "Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample". In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Bd. 24. 2. Cambridge University Press. 1928, S. 180–190.

[Gnedenko] Boris Gnedenko. "Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire". In: *Annals of mathematics* (1943), S. 423–453.

[Hahn] Hans Hahn. *Theorie der reellen Funktionen*. Springer, 1921.

[Hewitt und Stromberg] Edwin Hewitt und Karl Stromberg. *Real and abstract analysis: a modern treatment of the theory of functions of a real variable*. Springer-Verlag, 2013.

[Kabluchko] Zakhar Kabluchko. *Extremwerttheorie. Skriptum zur Vorlesung an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster.* 2015.

[Kuratowski] Kazimierz Kuratowski. "Topology, 1, Acad". In: *Press, New York* (1966).

[Löwe] Matthias Löwe. *Extremwerttheorie. Skriptum zur Vorlesung an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster.* 2009.

[Remmert und Schumacher] Reinhold Remmert und Georg Schumacher. *Funktionentheorie*. Bd. 5. Springer, 1984.

[Resnick] Sidney I Resnick. *Extreme values, regular variation and point processes*. Springer, 2013.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die Bachelorarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Düsseldorf, den 16. März 2020

(Torben Staud)